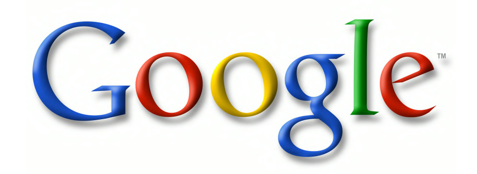
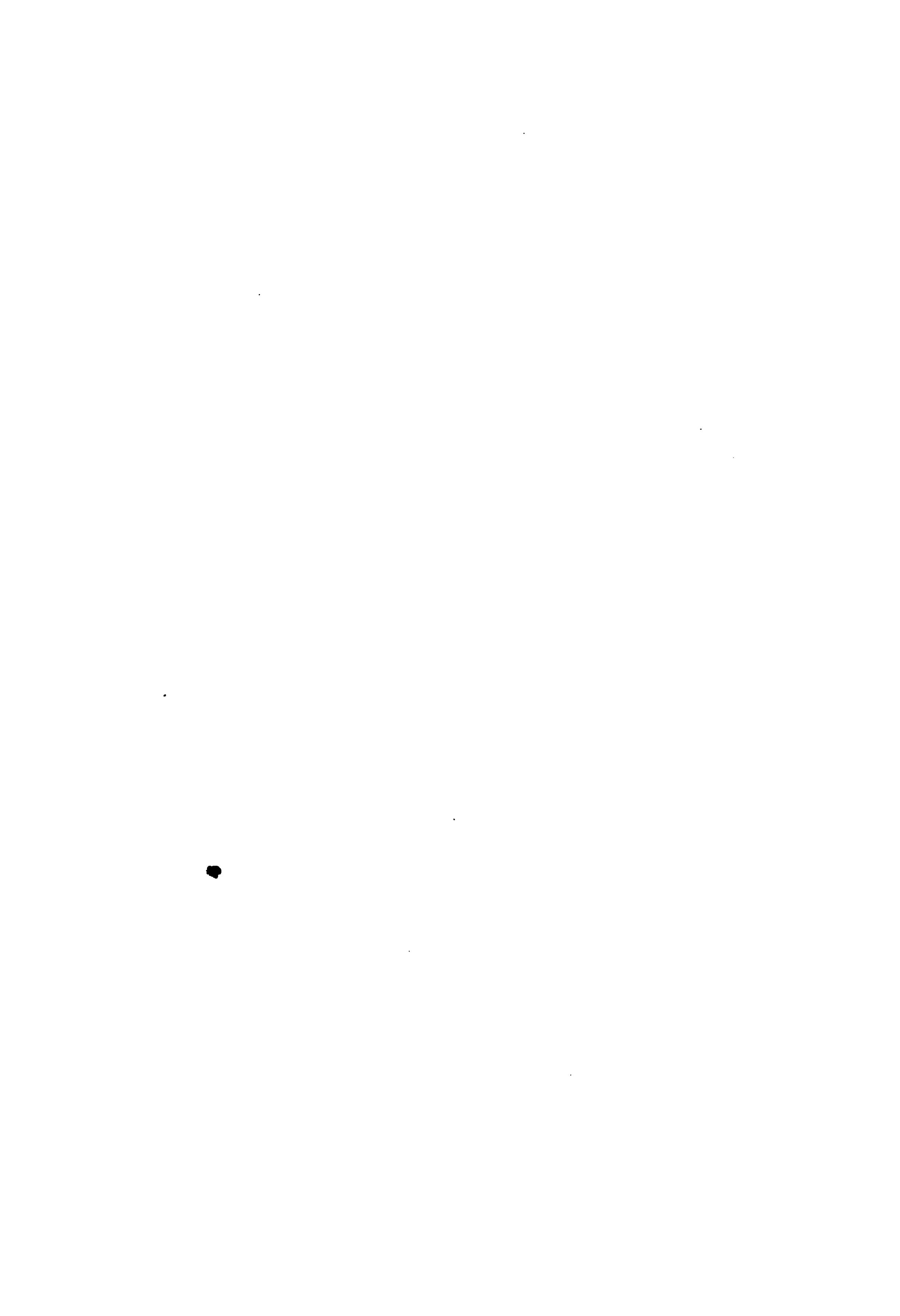





6000444510









VORLESUNGEN

ÜBER DIE

THEORIE DER QUATERNIONEN

MIT ANWENDUNG AUF DIE

ALLGEMEINE THEORIE

DER

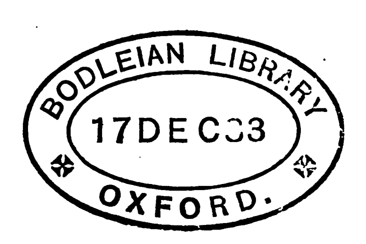
FLÄCHEN UND DER LINIEN DOPPELTER KRÜMMUNG.

VON

DR. FRIEDRICH GRAEFE.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1883.


BODLEIAN LIBRARY
17DEC03
OXFORD.

Vorwort.

Die vorliegenden Vorlesungen wurden im Wintersemester 1882/83 an der technischen Hochschule zu Darmstadt gehalten. Von den Zuhörern wurde Kenntnis der Differential- und Integralrechnung gefordert. Besonderes Gewicht wurde auf die Anwendung der Theorie gelegt. Die von Unverzagt aufgestellten „longimetrischen Quaternionen", welche in der Vorlesung nebenbei erwähnt wurden, sind hier ganz weggefallen.

Darmstadt, im Juli 1883.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

Erste Vorlesung.

Addition und Subtraktion von Strecken resp. Punkten.

Wenn wir eine gerade Linie von einem Punkte O nach dem Punkte M ziehen, so kommt der Linie OM aufser der absoluten Länge eine Richtung zu, welche durch Bewegung eines Punktes in gerader Linie von O nach M bestimmt wird.

Wenn wir die Linie oder Strecke ON an Länge gleich OM machen, so unterscheiden sich beide Strecken nur in der Richtung. Die gegenseitige Richtung beider Strecken ist bestimmt durch den Winkel MON. Ist der Winkel MON gleich zwei Rechte, so fällt ON mit OP zusammen und OP ist der Strecke OM „entgegengesetzt gerichtet“.

Da OP aus OM durch Drehung der Strecke OM um $2R$ entsteht, so werden wir setzen können:

$OP = OM . f(2R) \ldots 1,$

wenn $f(2R)$ ein Faktor ist, der OM um $2R$ dreht. Es ist dann klar, dafs wir auch schreiben können:

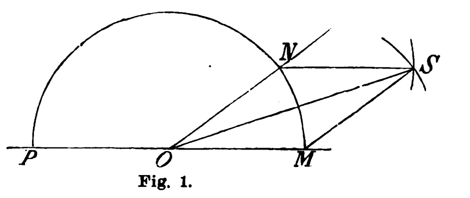
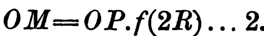


Fig. 1.



$OM = OP . f(2R) \ldots 2.$

Aus Gleichung 1 und 2 folgt:

$$OM = [OMf(2R)]\,f(2R) \;\ldots\; 3.$$

Nehmen wir für die Multiplikation das assoziative Gesetz $a(bc) = (ab)c$ an, so folgt aus Gleichung 3 die Gleichung:

$$f(2R)\,f(2R) = 1 \;\ldots\; 4,$$

deren Wurzeln $+1$ oder -1 sind. In unserem Fall gilt nur die Wurzel -1, denn wir nehmen an, dafs zwei Strecken im Raume nur dann gleich sind, wenn sie gleich lang, parallel

und gleichgerichtet sind. Aus Gleichung 1 und Gleichung 4 folgt

$$OP = OM(-1) = PO(-1) = -PO, \text{ d. h.}$$

„Eine einer anderen entgegengesetzt gerichtete Strecke ist die negative der ersteren (wenn beide auf derselben Geraden liegen)“.

Dies Resultat gilt freilich nur dann, wenn aus Gleichung 3 die Gleichung 4 folgt und $a(-1) = -a$ ist.

Zu demselben Resultat gelangen wir aber auch durch den Begriff der Addition. „Addieren zweier Objekte heifst nämlich, diese zwei Objekte, welche durch ein und dasselbe Element erzeugt werden, synthetisch so zu verbinden, dafs als Resultat ein neues Objekt erhalten wird, welches durch eine Veränderung des erzeugenden Elementes auch direkt gebildet werden könnte. (Hankel.)“ Das erzeugende Element der Strecke OM ist ein Punkt, der sich von O nach M bewegt, und OP entsteht dadurch, dafs der Punkt von O nach P geht. Lassen wir den Punkt erst OM durchlaufen, und dann die Strecke $MO = OP$, so ist das Resultat eine Strecke von der Länge Null; oder lassen wir den Punkt erst OP beschreiben und dann die Strecke $PO = OM$, so ist das Resultat ebenfalls eine Strecke von der Länge Null, also $OM + MO = MO + OM = OP + PO = 0$, wofür man auch schreiben kann $OM = -MO$, denn wir definieren $(a + b) - b = a$.

Wenn die Linie ON den Uebergang vom Punkt O nach dem Punkt N bezeichnet, so wird in gleicher Weise NS den Uebergang von N nach S darstellen; es bedeutet dann $ON + NS$, dafs nacheinander von O nach N und von N nach S gegangen werde. Das Resultat dieser Operationen ist aber der Uebergang von O nach S, also ist: $ON + NS = OS$, oder, da $NS = OM$, so ist $ON + OM = OS$, d. h.: „Die Summe zweier Strecken ist die Diagonale eines Parallelogramms, welches dieselben zu benachbarten Seiten hat.“

Aus der Fig. 1 folgt $OM + MS = OS$, oder, da $MS = ON$, $OM + ON = OS$, also $ON + OM = OM + ON$.

„Die Addition ist also kommutativ.“

Da $OS = -SO$ ist, so ist $ON + NS + SO = 0$, d. h.:

„Die Summe der in einerlei Sinn genommenen drei Seiten eines Dreiecks ist Null.“

Wir fügen drei Strecken so aneinander, dafs sie die Seiten AB, BC, CD eines Parallelepipedon bilden, dann haben wir

$$AB + BC = AC,$$

also

$$(AB + BC) + CD = AC + CD = AD$$

und

$$BC + CD = BD,$$

also

$$AB + (BC + CD) = AD,$$

mithin

Fig. 2.

$$(AB + BC) + CD = AB + (BC + CD).$$

„Die Addition ist also assoziativ.“

Wenn ON, RS Strecken derselben Geraden oder gleichgerichtet sind, und es sind diese Strecken zu addieren, so werden wir RS so verschieben, dafs ihr Anfangspunkt mit N zusammenfällt und $RS = NM$ setzen. Als Summe $ON + NM$ haben wir dann die ganze Strecke OM.

Zur Bestimmung der Differenz zweier Strecken haben wir die Definition $(a - b) + b = 0$. Setzen wir $b = ON$, $a = OM$ (Fig. 1), so haben wir die Strecke $(a - b)$ so zu bestimmen, dafs $ON + (a - b) = OM$; es ist aber

$$ON + NM = OM, \text{ also } a - b = NM.$$

Die Differenz zweier Strecken $OM - ON = NM$ ist also die Strecke, welche, wenn man die zu subtrahierende Strecke ON mit ihrem Anfangspunkte an den Anfangspunkt von OM legt, den Endpunkt ersterer mit dem Endpunkte letzterer verbindet. Lassen wir M mit O zusammenfallen, so ist $OO = 0$ und $-ON = NO$. Wir können hiernach eine Subtraktion immer in eine Addition verwandeln, denn es ist

$$OM - ON = OM + NO = NM.$$

Betrachten wir die Formeln, so sehen wir, dafs der Additionsbegriff allen formalen Bedingungen der Addition der Arithmetik genügt.

Wir wollen jetzt annehmen, dafs $a + b$ eine Strecke darstellt, wenn a und b zwei sich schneidende Strecken sind, und

dafs für diese Operation die Gesetze der Arithmetik gelten, d. h. dafs die Gleichungen bestehen

$$a + b = b + a, \quad (a + b) + c = a + (b + c).$$

Haben wir zwei gleich lange Strecken ON und OM (Fig. 1), so fällt die Strecke, welche $ON + OM$ darstellen soll, sicher in die Gerade OS, welche den Winkel zwischen ON und OM halbiert; denn, da $ON + OM = OM + ON$ ist, so ist kein Grund vorhanden, warum sie sich mehr der einen der beiden Strecken nähern soll, noch warum sie aufserhalb der Ebene der beiden Strecken sich befinde. Die Gerade ist also bekannt, auf welcher die Strecke $ON + OM$ sich befindet; unbekannt ist aber die Gröfse und Richtung der Strecke auf der Geraden. Hieraus folgt, dafs gleichgerichtete Strecken auf derselben Geraden addiert resp. subtrahiert werden, wie wir oben gezeigt haben.

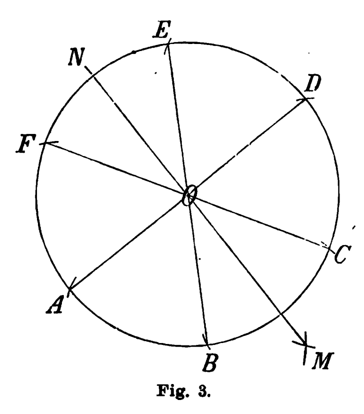


Fig. 3.

Wir konstruieren hier ein regelmäfsiges Sechseck A, B, C, D, E, F. Es ist dann $OA + OC$ eine Strecke, welche in die Gerade EB fällt; ist die Richtung dieser Strecke:

1) die von O nach B, so kann man setzen, wenn l eine positive Zahl ist:

$$OA + OC = l \,.\, OB$$

und ebenso

$$OB + OD = l \,.\, OC,$$

also ist:

$$OA + OD + (OB + OC) = l \,.\, OB + l \,.\, OC.$$

Es ist aber auch:

$$OA + OE = l \,.\, OF \quad \text{und} \quad OD + OF = l \,.\, OE,$$

mithin

$$OA + OD + (OE + OF) = l \,.\, OE + l \,.\, OF.$$

Da l eine positive Zahl ist, so ist leicht zu zeigen, dafs

$$l \,.\, OB + l \,.\, OC = l(OB + OC).$$

Wir haben also die beiden Gleichungen:

$$OA + OD = l(OB + OC) - (OB + OC)$$

und

$$OA + OD = l(OE + OF) - (OE + OF).$$

Ist l gröfser als 1, so ist nach der ersten Gleichung $OA + OD$ nach OM und nach der letzten Gleichung nach ON gerichtet, was nicht sein kann. Ist l kleiner als 1, so kann man die beiden letzten Gleichungen schreiben:

$$OA + OD + [OB + OC - l(OB + OC)] = 0$$

und

$$OA + OD + [OE + OF - l(OE + OF)] = 0$$

oder auch, wenn q eine positive Zahl ist:

$$OA + OD + q \, . \, OM = 0$$

und

$$OA + OD + q \, . \, ON = 0.$$

Beide Resultate können nur bestehen, wenn $OM = ON$ ist, was aber unmöglich ist. Es kann also nur $l = 1$ sein.

Wir erhalten also hier die bekannten Resultate:

$$OA + OD = OA + AO = 0,$$

oder

$$OA = - AO;$$

und

$$OA + OC = OB,$$

wenn $\sphericalangle AOC = 120^0$.

2) die von O nach E, so kann man setzen, wenn l eine positive Zahl ist:

$$OA + OC = l \, . \, OE$$

und

$$OC + OE = l \, . \, OA;$$

aus beiden Gleichungen folgen die Gleichungen

$$OA + OC - l \, . \, OE = 0, \quad OC + OE - l \, . \, OA = 0.$$

Die Gleichungen können nach unseren Annahmen nur übereinstimmen, wenn $l = -1$, was unmöglich ist.

Dieser Fall fällt also ganz weg, oder deckt sich mit dem ersten, wenn wir $- OE = EO$ setzen.

„Die Summe zweier gleich langen entgegengesetzt gerichteten Strecken ist also immer Null.“

Ziehen wir zwei gleich lange Strecken OA und OB, so liegt die Strecke $OA + OB$ auf der Halbierungslinie des $\measuredangle BOA$ und hat die Richtung OC. Ist nämlich $\measuredangle AOC = x$ gleich Null, so ist $OA + OB$ nach C gerichtet; dasselbe ist der Fall, wenn $x = 60^0$ ist, und $OA + OB$ ist gleich Null, wenn $x = 90^0$.

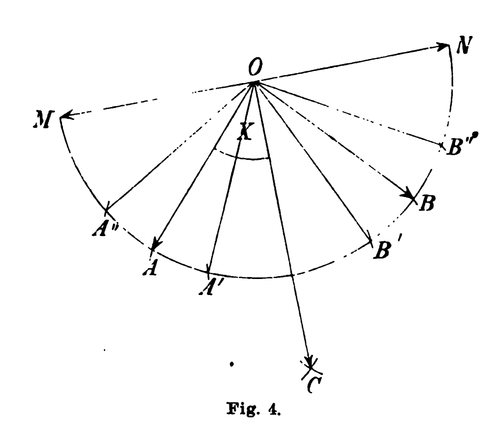


Fig. 4.

Wir werden aber sehen, dafs, wenn x wächst, die absolute Länge von $OA + OB$ abnimmt, und zwar um so langsamer, je langsamer x zunimmt. Da aber kein Grund vorhanden ist, dafs bei sehr langsamen Zunehmen von x die Richtung von OC in die entgegengesetzte Richtung umschlägt, ohne dafs die absolute Länge von $OA + OB$ Null würde, so ist damit bewiesen, dafs die Richtung von der Strecke $OA + OB$, von O nach dem Innern des Winkels AOB geht.

Sind OA und OB von der Länge l, und bezeichnet L die Länge von OA und OB, so ist L abhängig von l und $\measuredangle x$, und wir können schreiben:

$$L = l \, . \, f(x)$$

oder vielmehr $L = F(l, x)$. Wir können aber zeigen, dafs die letzte Gleichung auf die erste gebracht werden kann.

Ist nämlich OC' eine Strecke von der Längeneinheit auf OC, so ist:

$$OA + OB = L \, . \, OC' = OC,$$

und durch Addition finden wir

$$n(OA + OB) = nL \, . \, OC'.$$

nOA hat die Länge nl und ebenso nOB.

Wir können also, wie oben, setzen

$$nL = F(nl, x) = nF(l, x).$$

Nehmen wir $l = 1$, so ist $F(n, x) = nF(1, x)$. Da n nur positiv sein mufs, so ist auch $F(l, x) = lF(1, x) = lf(x)$, wenn wir $F(1, x) = f(x)$ setzen.

Wir denken uns die Strecken OA' und OA'' so gezogen, dafs sei $OA' + OA'' = OA$. OA' und OA'' bilden mit OA_1 den unbekannten Winkel z und haben die gemeinsame Länge l'. Es ist dann: $l = l'f(z)$.

Ebenso denken wir uns die Strecken OB' und OB'' so gezogen, dafs ist $\sphericalangle B'OB = \sphericalangle BOB'' = z$ und die gemeinsame Länge von OB' und OB'' gleich l', so ist wieder $l = l'f(z)$ und $OB = OB' + OB''$, also

$$OA + OB = (OA' + OB') + (OA'' + OB'').$$

Es ist $OA' + OB'$ eine Strecke von der Länge

$$l_1 = l'f(x - z)$$

und $OA'' + OB''$ eine Strecke von der Länge $l_1 = l'f(x + z)$, beide Strecken gelegen auf der Strecke OC. Es ist also

$$L = l\,f(x) = l'f(x)f(z) = l'[f(x + z) + f(x - z)]$$

oder

$$f(x)f(z) = f(x + z) + f(x - z).$$

Dieser Gleichung genügt $f(x) = 2\cos ax$.

Ist $x = 0$, so ist $f(0) = 2$ und $L = 2l$.

Aus der Gleichung folgt $f(x) = f(-x)$.

Ist $x = 1R$, so ist $f(1R) = 0$ und $f(2 + 1R) + f(z - 1R) = 0$ und $f(2R) = -2$; $f(z) = -f(z + 2R)$, d. h. $f(z)$ hat dieselbe Periode wie $\cos z \,.\, m$.

Wir setzen $f(x) = 2\,\varphi(x)$ und erhalten

$$2\,\varphi(x)\,\varphi(z) = \varphi(x + z) + \varphi(x - z)$$

und hieraus

$$2\,\varphi(x)^2 = \varphi(2x) + 1$$
$$4\,\varphi(x)^3 = \varphi(3x) + 3\varphi(x)$$
$$8\,\varphi(x)^4 = \varphi(4x) + 4\varphi(2x) + 3 \text{ u. s. w.,}$$

woraus wir schon schliefsen können, dafs $f(x) = 2\cos x$ ist.

Aus diesen Gleichungen folgt, dafs $f(x) = 2\cos x$ richtig ist für $x = m \,.\, 60^0$, wenn m eine positive Zahl ist. Setzen wir $m \,.\, 60^0 = \alpha$, so gilt die Gleichung $f(\alpha) = 2\cos\alpha$.

In der allgemeinen Gleichung machen wir $x = z = \frac{\alpha}{2}$ und haben

$$f\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 2\cos\alpha + 2 = \left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

Bilden wir uns die Gleichungen für $\frac{\alpha}{4}, \frac{\alpha}{8}, \ldots \frac{\alpha}{2^n}$, so sehen wir, dafs auch die Gleichung $f(\alpha) = 2\cos\alpha$ für $\frac{\alpha}{2^n}$ oder $\frac{m \,.\, 60}{2^n}$ gilt. Ebenso können wir zeigen, dafs $f(\alpha) = 2\cos\alpha$ ist, für $\alpha = \frac{m \,.\, 90}{2^n}$. Setzen wir in der allgemeinen Gleichung $x = \frac{m \,.\, 90}{2^p}$, $z = \frac{n \,.\, 60}{2^r}$ und dann $x = \frac{m \,.\, 90}{2^p} + \frac{n \,.\, 60}{2^r}$, $z = \frac{m \,.\, 90}{2^p} - \frac{n \,.\, 60}{2^r}$, so erhalten wir die Formeln:

$$4\cos\frac{m \,.\, 90}{2^p} \cdot \cos\frac{n \,.\, 60}{2^r} = f\left(\frac{m \,.\, 90}{2^p} + \frac{n \,.\, 60}{2^r}\right) + f\left(\frac{m \,.\, 90}{2^p} - \frac{n \,.\, 60}{2^r}\right)$$

$$f\left(\frac{m \,.\, 90}{2^p} + \frac{n \,.\, 60}{2^r}\right) \cdot f\left(\frac{m \,.\, 90}{2^p} - \frac{n \,.\, 60}{2^r}\right) = 2\cos 2m \,.\, 90 + 2\cos 2n \,.\, 60.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt, dafs $f(\alpha) = 2\cos\alpha$ ist, für $\alpha = \frac{m \,.\, 90}{2^p} \pm \frac{n \,.\, 60}{2^r}$. Die Zahlen m, n, p, r können wir sehr grofs, resp. sehr klein machen; wir können also die Werte von x durch unendlich kleine Grade wachsen lassen. Die Gleichung $f(x) = 2\cos x$ umfafst also alle möglichen Werte von x, und gilt allgemein, da sie für die Werte $x = \frac{m.60}{2^r}$, $\frac{m.90}{2^r}$, $\frac{m \,.\, 90}{2^p} \pm \frac{n \,.\, 60}{2^r}$ richtig ist.

Wir haben also $L = 2\,l\cos x$. Die Strecke, welche die Summe $OA + OB$ darstellt, fällt also in Bezug auf Länge und Richtung mit der Diagonale OC des Parallelogramms $OBCA$ zusammen.

Wir nehmen jetzt an, OA und OB seien zwei aufeinander senkrecht stehende Strecken von verschiedener Länge. Wir

konstruieren das Rechteck $OACB$ und ziehen die beiden Diagonalen AB, OC und

$$AM \parallel OC \parallel BN; \; MON \parallel AB.$$

Wir sehen, dafs ist:

$$OA + OB = (OM + OE) + (OE + ON)$$
$$= (OM + ON) + 2\,OE = OC.$$

Fig. 5.

Die Summe $OA + OB$ ist also auch hier die Strecke, welche mit der Diagonale zusammenfällt.

Sind OA und OB zwei beliebige Strecken, so stellt auch hier die Diagonale OC die Strecke $OA + OB$ dar. Um dies zu beweisen, ziehen wir $NM \perp OC$, $AM \parallel OC \parallel BN$, $AF \perp OC$, $BE \perp OC$.

Wir haben dann die Gleichungen:

$$OA = OM + OF, \quad OM + ON = 0,$$
$$OB = ON + OE, \quad OE + OF = OC,$$

also

$$OA + OB = (OM + ON) + (OE + OF) = OC.$$

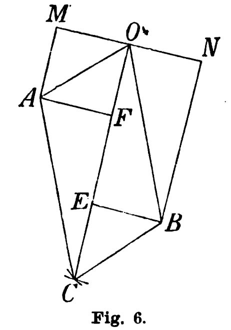


Fig. 6.

Wir sind also hiermit zu denselben Resultaten gelangt, wie oben durch die Definition der Addition. Während wir bei der ersten Darstellung von Summen annahmen, dafs zwei Strecken gleich sind, wenn sie gleich lang, parallel und gleichgerichtet sind, so genügt bei der letzten Entwickelung die Voraussetzung, dafs zwei Strecken gleich sind, wenn sie gleich lang, gleichgerichtet sind und auf derselben Geraden liegen.

Nehmen wir jetzt an, dafs zwei Strecken einer Geraden nur gleich werden können, so handelt es sich vorerst darum, parallele Strecken zu addieren. Da die Addition der Strecken, die sich in einem Punkte schneiden, der Zusammensetzung der auf einen Punkt wirkenden Kräfte in der Statik genau entspricht, so können wir ganz ebenso wie in der Statik beweisen, dafs „die Summe zweier parallelen Strecken AC und BD die dritte zu AC und BD parallele Strecke ist, deren

Anfang den Abstand von A und B im Verhältnis von $\frac{(AC)}{(BD)}$ teilt, und deren absolute Länge gleich der Summe der absoluten Längen der beiden Strecken ist".

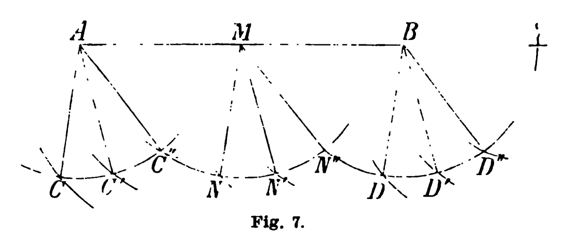


Fig. 7.

Ziehen wir die gleichlangen und gleichgerichteten Strecken AC und BD, so ist:

$$AC + BD = 2\,MN,$$

wenn $AM = MB$ ist, und MN dieselbe Länge wie AC hat.

Ebenso haben wir die Gleichungen:

$$AC' + BD' = 2\,MN'$$
$$AC'' + BD'' = 2\,MN''$$
$$AC''' + BD''' = 2\,MN''' \text{ u. s. w.},$$

wenn alle absoluten Längen der Strecken gleich sind und

$AC' \parallel BD' \parallel MN'$, $AC'' \parallel BD'' \parallel MN''$, $AC''' \parallel BD''' \parallel MN'''$ u. s. w.

Sind alle AC gleich lang, so haben auch die MN und BD diese Eigenschaft.

Denken wir uns durch A und B alle möglichen Geraden von gleicher Länge gezogen und addieren diese Strecken, so geht die Strecke, welche die Summe darstellt, durch den Punkt M. In Zeichen ausgedrückt haben wir die Gleichung:

$$\Sigma AC + \Sigma BD = 2\,\Sigma MN.$$

Führen wir die Addition aus, so erhalten wir nach den gegebenen Regeln $0 + 0 = 2 \,.\, 0$. Wir können aber die Gleichung auch anders interpretieren. Sind AM und AC zwei Strecken, deren Summe eine Strecke ist, welche durch A geht. Je gröfser der Winkel zwischen AM und AC ist, um so kleiner ist die Strecke $AM + AC$, welche zu Null wird, wenn MAC

eine gerade Linie ist. Wie grofs auch der Winkel MAC ist, die Strecke $AM + AC$ geht durch A. Wir können mithin, wenn AM' entgegengesetzt gerichtet von AM ist und gleiche Länge wie AM hat, die Summe $AM + AM'$ als den Repräsentanten des Punktes A (der unendlich kleinen Strecke A) betrachten. So stellt denn ΣAC, als der Inbegriff aller gleichlangen Strecken durch A, den Punkt A dar, und ebenso repräsentiert ΣBD den Punkt B und ΣMN den Punkt M. Und obige Gleichung wird zu

$$A + B = 2M.$$

Wir können hier A, B, M als Vertreter gleichlanger, gleichgerichteter Strecken auffassen, welche in jenen Punkten ihren Anfang haben; es sagt dann die Gleichung nur das Gesetz der Addition jener Strecken aus. Der Punkt $2M$ ist Vertreter einer Strecke, die doppelt so lang ist, als die Strecke, welche durch A oder B dargestellt wird. Treten in der Rechnung Punkte auf, welche Strecken von gleicher Länge und Richtung darstellen, so nennen wir sie „gleichwertige Punkte". Vertritt der Punkt A eine Strecke von der Längeneinheit, so stellt der Punkt nA eine Strecke von n Längeneinheiten dar. Den Punkt nA, welcher eine Strecke von n Längeneinheiten darstellt, nennen wir einen „n fachen" oder „n wertigen Punkt".

Aus der Gleichung:

$$A + B = 2M$$

folgt: „Die Summe der gleichwertigen Punkte A und B ist ein Punkt, welcher den Abstand AB halbiert und den doppelten Wert wie einer der Punkte A oder B hat."

Da wir annehmen, dafs alle Punkte im Raume Stellvertreter von Strecken sind, die einer Strecke parallel laufen, so müssen wir unter der Summe

$$m \,.\, A + n \,.\, B$$

den $(m + n)$ fachen Punkt C verstehen, welcher den Abstand AB im Verhältnis von $n : m$ teilt, so dafs wir setzen können:

$$mA + nB = (m + n)\,C.$$

Die Summe der drei einfachen Punkte

$$A + B + C = 3D$$

stellt den dreifachen Punkt D dar, der mit dem Schwerpunkt der Punkte A, B, C zusammenfällt. Es ist nämlich

$$A + B = 2C'$$

und

$$2C' + C = 3D.$$

Die Gerade $C'C$ geht nach der Mitte von AB und es ist die Länge DC gleich der doppelten Länge DC', d. h. D ist der Schwerpunkt von A, B, C. Zu demselben Resultat gelangen wir, wenn wir uns bilden:

$$B + C = 2A'$$
$$2A' + B = 3D,$$

denn es gilt für parallele Strecken das Gesetz

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Addieren wir vier einfache Punkte A, B, C, D, so stellt die Summe

$$A + B + C + D = 4E$$

den vierfachen mit dem Schwerpunkt der Punkte A, B, C, D zusammenfallenden Punkt $4E$ dar.

So fällt der n fache Punkt P

$$A + B + C + D + E \ldots = nP$$

mit dem Schwerpunkt dieses Punktsystems zusammen.

Aus diesem Grunde hat Möbius die Rechnung mit Punkten den „barycentrischen Kalkül" genannt.

Da eine einer andern entgegengesetzt gerichtete Strecke die negative der ersteren ist, so haben wir unter der Differenz $mA - nB$ einen $m - n$ fachen Punkt C zu verstehen, welcher den Abstand AB im Verhältnis von $-n : m$, d. h. äufserlich im Verhältnis von $n : m$ teilt.

Aus dieser Erklärung ergiebt sich, dafs

$$B - A$$

einen Punkt von der Gröfse Null darstellt, welcher auf der Geraden AB im Unendlichen liegt. Das einfachste wäre also, $B - A$ als Repräsentanten der Richtung AB zu betrachten.

Da die Addition und Subtraktion der Punkte aber mit den entsprechenden Operationen von parallelen Strecken übereinstimmt, so gelten die Gesetze der Arithmetik.

Wir haben also

$$(B - A) + A = B = A + (B - A).$$

Die Addition von $B - A$ zu A verschiebt also A nach B, oder $B - A$ bewirkt durch Hinzufügung von A, daſs A die Strecke AB beschreibt.

Addieren wir aber $B - A$ zu einem beliebigen dritten Punkt C, welcher mit A und B gleichwertig ist, so erhalten wir einen Punkt C_1, welcher aus C entstanden ist durch Verschiebung des Punktes C um die Strecke AB.

Es ist nämlich:

$$C + (B - A) = (C + B) - A$$
$$C + B = 2D$$
$$2D - A = C_1,$$

da $\quad A + C_1 = 2D.$

Fig. 8.

Da aber D in der Mitte von BC liegt und $AD = DC'$ ist, so ist CC' parallel und gleich AB.

$B - A$ ist also ein Operator, der einen Punkt, zu dem er addiert wird, um eine Strecke verschiebt, welche gleiche Richtung und Länge mit der Strecke AB hat. Durch die Strecke AB ist $B - A$ als Operator im gegebenen Sinne vollständig bestimmt; umgekehrt ist aber durch $B - A$ als Operator die bestimmte Strecke AB nicht ganz festgelegt, sondern nur deren Gröſse und Richtung. Wir können daher, wenn AB festgelegt ist, setzen:

$$AB = B - A$$

wenn wir uns nur immer bewuſst sind, daſs AB ein Operator ist, der einen Punkt, zu dem er addiert wird, um eine Strecke verschiebt, welche gleichgerichtet, gleichlang und parallel mit AB ist. Lassen wir aber diese Gleichung unter allen Umständen gelten, d. h. daſs $B - A$ gleich der Strecke AB ist, oder auch, daſs wir statt der Strecke den Operator $B - A$

einführen, so setzen wir damit fest, wenn zugleich die allgemeinen Additionsgesetze gelten, dafs gleichlange, gleichgerichtete, parallele Strecken gleich sind.

Dies können wir jetzt ohne jeglichen Verstofs gegen die Entwickelung, zumal wir die Rechnung mit Punkten ganz frei von der Rechnung mit Strecken machen können. Wir definieren einfach die Addition für Punkte übereinstimmend wie oben und nehmen die allgemeinen Gesetze der Arithmetik an. Dann folgt wie oben die Bedeutung der Differenz zweier gleichwertigen Punkte $B - A$.

Es bleibt noch übrig zu zeigen, dafs aus $B - A = AB$ die Additions- und Subtraktionsgesetze der Strecken folgt. Ist

$$B - A = AB,$$

so ist

$$A - B = BA,$$

also das bekannte Resultat: $AB = - BA$.

Aus

$$B - A = AB$$
$$C - A = AC$$

folgt:

$$B + C - 2A = AB + AC.$$

Es ist aber (Fig. 8)

$$B + C = 2D \text{ und } 2D - 2A = 2(D - A) = 2AD = AC_1,$$

also

$$AB + AC = AC_1.$$

Es ist aber:

$$AB + BC_1 = (B - A) + (C_1 - B) = C_1 - A = AC_1,$$

mithin:

$$AB + BC_1 = AB + AC,$$

also

$$BC_1 = AC,$$

d. h. AC und BC_1 sind als gleichgerichtete Gegenseiten eines Parallelogramms gleich.

Hiermit ist nachgewiesen, dafs wir aus der Annahme

$$AB = B - A$$

wieder die Gesetze der Addition resp. Subtraktion von Strecken erhalten.

Zweite Vorlesung.

Anwendung der Gesetze der Addition von Strecken.

Um die Brauchbarkeit der in der ersten Vorlesung gegebenen Sätze über die Addition und Subtraktion von Strecken zu zeigen, wollen wir mit ihrer Hilfe bekannte geometrische Wahrheiten ableiten.

Es sei ein Dreieck A, B, C gegeben und auf AB, BC, AC die Strecken γ, α, β von der Längeneinheit abgetragen. Ist die absolute Länge von AB gleich c, die von BC gleich a und die von $AC = b$, so ist natürlich:

$$AB = c\gamma, \quad AC = b\beta, \quad BC = a\alpha.$$

Da

$$AB + BC = AC,$$

so ist:

$$c\gamma + a\alpha = b\beta.$$

Es seien A', B', C' die resp. Mitten der Linien BC, AC, AB; BB' und CC' schneiden sich in einem Punkte E und es bestehen die Gleichungen:

$$AE = c\gamma + BE,$$

$$BE = l \cdot BB' = l\left(-c\gamma + \frac{b\beta}{2}\right),$$

also

$$AE = c\gamma(1 - l) + \tfrac{1}{2} lb\beta,$$

und

$$AE = b\beta + CE = b\beta(1 - m) + \tfrac{1}{2} mc\gamma,$$

mithin durch Subtraktion der beiden letzten Gleichungen:

$$c\gamma\left(1 - l - \frac{m}{2}\right) + b\beta\left(\frac{l}{2} - 1 + m\right) = 0.$$

Da $p\gamma$ eine Strecke auf AB ist und $q\beta$ eine Strecke auf AC, so kann die Gleichung

$$p\gamma + q\beta = 0$$

nur bestehen, wenn $p = 0$, $q = 0$. Denn wären p und q nicht gleich Null, so müfsten $p\gamma$ und $q\beta$ in eine Gerade fallen; dies widerspricht der Annahme.

„Haben wir allgemein zwei nicht parallele Strecken γ, β, so ist

$$p\gamma + q\beta = p'\gamma + q'\beta,$$

wenn

$$p = p', \quad q = q'.“$$

Denn aus der Gleichung folgt:

$$(p - p')\gamma + (q - q')\beta = 0.$$

Wir haben zur Bestimmung von m und l die Gleichungen:

$$1 - l = \frac{m}{2}, \quad 1 - m = \frac{l}{2},$$

also:

$$m = l = \tfrac{2}{3}.$$

Daher ist:

$$AE = \tfrac{1}{3}(b\beta + c\gamma).$$

Ist R ein Punkt auf der Geraden AA', so ist

$$AR = 2n \cdot AA' = n(AB + AC) = n(b\beta + c\gamma),$$

d. h. es liegt E auf der dritten Mittellinie und liegt in $\frac{2}{3}$ von AA', da $b\beta + c\gamma = 2AA'$ ist.

Wir haben also den Satz:

„Die Verbindungslinien der Mitten der Seiten eines Dreiecks mit den gegenüberliegenden Ecken schneiden sich in einem und denselben Punkte und teilen einander so, dafs die Stücke sich verhalten wie 2 : 1.“

Halbiert die Linie AE den Winkel BAC, so können wir setzen:

$$AE = l(\beta + \gamma),$$

weil — da die Längen von β und γ gleich sind — $\beta + \gamma$ eine Strecke ist, welche in die Winkelhalbierende fällt. Die Gerade BE halbiere den Winkel an B.

Es ist dann:

$$EB = m(\alpha - \gamma) = m\left(\frac{b\beta - c\gamma}{a} - \gamma\right).$$

Da

$$AE + EB = AB,$$

so ist:

$$l(\gamma + \beta) + m\left(\frac{b\beta - c\gamma}{a} - \gamma\right) = c\gamma$$

und hieraus:

$$c = l - \frac{mc}{a} - m$$

$$0 = l + \frac{mb}{a},$$

also:

$$m = -\frac{ac}{a+b+c}$$

$$l = \frac{bc}{a+b+c}.$$

Es ist aber:

$$AE + EC = AC,$$

und wird der Wert von l und $c\gamma = b\beta - a\alpha$ eingesetzt, so ist

$$EC = \frac{ab}{a+b+c}(\alpha + \beta),$$

d. h. EC halbiert den Winkel in C. Daher haben wir den Satz:

„Die Halbierungslinien der Winkel eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte."

Ist AE_1 die Halbierungslinie des Winkels A, welche von der Halbierungslinie des Aufsenwinkels bei B in E_1 geschnitten wird, so ist

$$AE_1 = l(\gamma + \beta),$$

$$E_1B = m(\alpha + \gamma) = m\left(\frac{b\beta - c\gamma}{a} + \gamma\right),$$

und

$$AE_1 + E_1B = c\gamma = l(\gamma + \beta) + m\left(\frac{b\beta - c\gamma}{a} + \gamma\right),$$

und hieraus folgt:

$$m = \frac{ac}{b+c-a}, \quad l = \frac{-bc}{b+c-a}.$$

Es ist aber:

$$AE_1 + E_1C = AC$$

oder:

$$E_1C = b\beta - \frac{bc}{b+c-a}\left(\frac{b\beta - a\alpha}{c} + \beta\right)$$

$$= -\frac{ba}{b+c-a}(\alpha - \beta).$$

Hieraus ergiebt sich, dafs E_1C den Aufsenwinkel C halbiert. Also:

„Die Halbierungslinien zweier äufseren und des dritten inneren Winkels eines Dreiecks schneiden sich in einem und denselben Punkte."

Die Gerade AU halbiere den Aufsenwinkel bei A, die Gerade BV halbiere den Aufsenwinkel bei B und die Gerade

CZ den Aufsenwinkel bei C und U, V, Z liegen auf den Seiten des Dreiecks. Es ist dann:

$$AU = m(\beta - \gamma),$$
$$BU = n\alpha,$$
$$AU - BU = AB,$$

oder:

$$m(\beta - \gamma) - n\frac{b\beta - c\gamma}{a} = c\gamma,$$

also:

$$n = -\frac{ca}{b-c}, \quad m = -\frac{cb}{b-c}.$$

Ferner ist:

$$AV = r\beta,$$
$$VB = s(\gamma + \alpha),$$
$$AV + VB = AB,$$

oder

$$c\gamma = r\beta + \left(\gamma + \frac{b\beta - c\gamma}{a}\right)s,$$

also

$$s = \frac{ac}{a-c}, \quad r = -\frac{bc}{a-c}.$$

Es ist auch:

$$AZ = u\gamma,$$
$$ZC = p(\beta - \alpha)$$
$$AZ + ZC = AC$$

oder

$$u = \frac{b\beta - a\alpha}{c} + (\beta - \alpha)p = b\beta,$$

also

$$u = \frac{bc}{c-a}, \quad p = \frac{-ab}{b-a}.$$

Es ist aber:

$$VA + AU = VU,$$

oder, mit den eingesetzten Werten:

$$VU = \frac{bc}{(a-c)(b-c)}[\beta(b-a) + \gamma(a-c)].$$

Aus der Gleichung:

$$AZ + ZV = AV$$

folgt:

$$VZ = \frac{bc}{(b-a)(a-c)}[\beta(b-a) + \gamma(a-c)].$$

Vergleichen wir VU und VZ, so erhalten wir den Satz:

„Wenn man in einem Dreieck die Aufsenwinkel halbiert, so schneiden die Halbierungslinien die gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks in drei Punkten, welche in einer geraden Linie liegen.“

Nehmen wir auf AC, statt der Einheitsstrecke γ, die Einheitsstrecke $-\gamma$, so erhalten wir aus dem letzten Satze sehr leicht folgenden Satz:

„Die Halbierungslinien zweier inneren Winkel und des dritten Aufsenwinkels eines Dreiecks schneiden die gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks in drei Punkten, welche in einer geraden Linie liegen.“

Wir haben durch unsere Entwickelung nicht nur die angeführten Sätze erhalten, sondern auch, um kurz zu reden, die Verhältnisse, in welchen sich die begrenzten Linien schneiden. Halbiert die Linie AE den Winkel A, so haben wir gesetzt:

$$AE = l(\beta + \gamma).$$

Trifft diese Gerade die Seite BC in A_1, so ist

$$AA_1 = m(\beta + \gamma).$$

Es ist aber auch:

$$\begin{aligned} AA_1 &= AB + BA_1 = AB + p(AC - AB) \\ &= c\gamma + p(b\beta - c\gamma), \end{aligned}$$

mithin

$$m(\beta + \gamma) = c\gamma + p(b\beta - c\gamma).$$

Hieraus folgt:

$$p = \frac{c}{b + c}.$$

Es ist aber p die Teilzahl von BC für die Länge BA_1, daher ist die Teilzahl für A_1C:

$$1 - p = \frac{b}{b + c}.$$

Es verhalten sich also die absoluten Längen von BA_1 zu A_1C wie $c : b$, d. h.

„Die Halbierungslinie eines Winkels eines Dreiecks teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten.“

Betrachten wir den Gang unserer Beweise, so sehen wir, dafs das Verfahren die Beweise zu finden oder Aufgaben zu lösen, folgendes ist:

Wir suchen die Strecke nach einem Punkte auf zwei verschiedene Weisen durch gegebene Strecken auszudrücken, dann die Resultate gleichzusetzen und durch Gleichmachen der Koefficienten derselben Strecken einen Satz oder Lösung einer Aufgabe zu erhalten.

Es ist interessant die Gleichungen in Bezug auf Strecken in Gleichungen von Punkten umzusetzen.

Ist E der Punkt, in welchem sich die Winkelhalbierenden des Dreiecks schneiden, so ist

$$AE = \frac{1}{a+b+c}[c(b\beta) + b(c\gamma)]$$

oder:

$$AE = \frac{c \cdot AC + b \cdot AB}{a+b+c}.$$

Da aber $AE = E - A$ ist, so ist

$$E - A = \frac{cC + bB - (b+c)A}{a+b+c},$$

also

$$E(a+b+c) = aA + bB + cC.$$

Dies ist der Ausdruck für den Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden.

Für den Punkt E_1 unserer Figur erhalten wir den Ausdruck:

$$E[a - (b+c)] = Aa - Bb - Cc.$$

So ist auch:

$$U - V = \frac{(b-a)cC + (a-c)bB + (b-c)aA}{(a-c)(b-c)}$$

$$Z - V = \frac{(b-a)cC + (a-c)bB + (b-c)aA}{(b-a)(a-c)}.$$

In den bewiesenen Sätzen kommen nur gerade Linien vor. Um aber Probleme, in welchen krumme Linien auftreten, zu lösen, müssen wir die krummen Linien durch Strecken zu bestimmen suchen.

Wir werden im folgenden die Strecken in Bezug auf Gröfse und Richtung mit griechischen Buchstaben und die

Länge dieser Strecken mit den entsprechenden lateinischen Buchstaben bezeichnen.

Ziehen wir durch einen festen Punkt im Raume als Anfangspunkt der Strecken eine Strecke OM parallel einer gegebenen Strecke α, so stellt die Gleichung:

$$\varrho = p\alpha$$

den Endpunkt M dar, wenn die Strecke OM, p mal so lang ist als α.

Lassen wir p alle möglichen reellen Zahlen durchlaufen, so beschreibt M die zu α parallele unbegrenzte Gerade.

Die Gleichung

$$\varrho = x\alpha$$

ist also der Repräsentant der zu α parallelen Geraden und wir können sie deshalb „die Gleichung der durch den Anfangspunkt zu α parallel gezogenen Geraden" nennen.

Gehen wir umgekehrt von einer Gleichung

$$\varrho = x\alpha$$

aus und suchen ihr geometrisches Bild, so erhalten wir alle Geraden, die zu α parallel sind, wenn der Anfangspunkt nicht gegeben ist. Setzen wir aber ein für allemal den Anfangspunkt als gegeben voraus, so stellt die Gleichung nur eine bestimmte Gerade dar.

Ziehen wir durch O eine Gerade $OB = \beta$ und durch B die Gerade BN parallel der Geraden α, so ist, wenn M auf BN liegt:

$$OM = OB + BM$$

oder

$$\varrho = \beta + x\alpha.$$

Lassen wir x alle möglichen Werthe durchlaufen, so beschreibt der Punkt M die Gerade BN.

Die Gleichung einer Geraden, die parallel zu α und durch den Endpunkt von $\varrho = \beta$ geht, ist:

$$\varrho = \beta + x\alpha.$$

Sind zwei Strecken OA und OB gleich α, β gegeben und M ein Punkt von AB, so ist

$$OM = OA + AM = OA + x \cdot AB = OA + x(AO + OB)$$

oder

$$\varrho = \alpha + x(\beta - \alpha).$$

Es ist aber auch

$$OM = OB + BM = OB + yBA = OB + y(BO + OA)$$

oder

$$\varrho = \beta + y(\alpha - \beta)$$

und

$$x = 1 - y.$$

Diese Ausdrücke für ϱ stellen also die Strecke durch die Endpunkte von α und β dar.

Die allgemeine Gleichung einer Geraden durch die Enden von α und β ist:

$$A\alpha + B\beta + C\varrho = 0,$$

wenn die Relation

$$A + B + C = 0$$

besteht.

Soll diese Gleichung eine gerade Linie durch die Endpunkte von α und β darstellen, so kann sie sich von der Gleichung derselben Geraden

$$-\varrho + \beta + x(\alpha - \beta) = 0$$

nur durch einen Faktor unterscheiden. Multiplizieren wir daher die letzte Gleichung mit einem Faktor m, so wird sich derselbe so bestimmen lassen, dafs beide Gleichungen miteinander übereinstimmen.

Es ist daher

$$A\alpha + B\beta + C\varrho = mx\alpha + m\beta(1 - x) - \varrho,$$

also:

$$A = mx, \quad B = m(1-x), \quad C = -m,$$

woraus obige Bedingung folgt.

Wenn aber diese Bedingung nicht erfüllt ist, so müssen wir untersuchen, was dann die Gleichung:

$$A\alpha + B\beta + C\varrho = 0$$

oder

$$m\alpha + n\beta = \varrho$$

darstellt.

Nehmen wir an, die Gleichung stelle eine Gerade dar. Diese Gerade schneide α in P und β in Q. Wir haben dann

$$OM = OP + PM = OP + PQ + QM = OP + x . PQ$$

oder

$$\varrho = z . \alpha + x(y . \beta - z . \alpha),$$

wenn

$$OP = z . \alpha, \; OQ = y . \beta .$$

Durch Vergleichung beider Gleichungen erhalten wir:

$$z(1 - x) = m, \quad xy = n,$$

d. h. m und n sind lineare Funktionen von x. Daher haben wir:

„Genügen m und n den in u linearen Funktionen:

$$m = a_1 u + b_1$$
$$n = a_2 u + b_2 ,$$

so stellt die Gleichung $\varrho = m\alpha + n\beta$ eine Gerade dar, und umgekehrt."

Setzen wir dies in die Gleichung ein, so erhalten wir:

$$u(a_1\alpha + a_2\beta) = \varrho - (b_1\alpha + b_2\beta) .$$

Da a_1, a_2, b_1, b_2 gegeben sind, so sind $a_1\alpha + a_2\beta$, $b_1\alpha + b_2\beta$ bekannte Strecken. Setzen wir daher

$$OM' = b_1\alpha + b_2\beta ,$$

so ist

$$M'M = \varrho - (b_1\alpha + b_2\beta) .$$

M' ist ein fester Punkt; lassen wir daher in der Gleichung

$$M'M = u(a_1\alpha + a_2\beta)$$

sich u ändern, so beschreibt der Punkt M, wenn wir M' als den Anfangspunkt der Strecken betrachten, eine Gerade parallel der bekannten Strecke $a_1\alpha + a_2\beta$.

Wenn aber zwischen n und m eine Gleichung beliebigen Grades gegeben ist, so setzen wir z. B. für n irgend einen Wert voraus, und ermitteln durch die Gleichung eine endliche Zahl von Werten von m, welche dem angenommenen Werte von n entsprechen. Für dieses n und die entsprechenden m erhalten wir durch die Gleichung

$$\varrho = m\alpha + n\beta$$

einen oder mehrere Punkte — als Endpunkte der ϱ — in der

Ebene der Strecken α, β. Nehmen wir für n einen anderen Wert und finden in derselben Art eine andere Reihe von Punkten; und so fahren wir fort.

Wenn wir so dem n alle möglichen reellen Werte beilegen, so entsteht auf der Ebene der Strecken α, β eine Reihe von Punkten, von welchen jeder Punkt den Bedingungen der Gleichung genügt und welcher daher ihr geometrischer Ausdruck ist.

Hieraus ersehen wir, dafs die Gleichung:

$$\varrho = m\alpha + n\beta$$

irgend einen „Ort“ darstellen mufs, wenn zwischen m und n eine Gleichung $\varphi(m, n) = 0$ besteht, und dafs wir so viele Punkte dieses Ortes bestimmen können, als nötig sind, um ihn vollständig darzustellen.

Statt der einen Gleichung zwischen m und n können wir annehmen, dafs zwischen m und einer beliebigen Gröfse t eine Gleichung bestehe und eine Gleichung zwischen n und t. Denn ist $\psi(t, m) = 0$ und $\chi(t, n) = 0$, so können wir t aus beiden Gleichungen eliminieren und erhalten die eine Gleichung $\varphi(m, n) = 0$. Lösen wir die letzten Gleichungen nach m und n auf, so erhalten wir m und n durch t ausgedrückt:

$$m = f_1(t), \quad n = f_2(t)$$

und setzen wir dies in die Gleichung von ϱ, so ist:

$$\varrho = f_1(t)\alpha + f_2(t)\beta.$$

Da aber α und β gegeben sind, so ist ϱ durch t bestimmt und wir können setzen:

$$\varrho = f(t).$$

Wenn diese Gleichung gegeben ist, so können wir den durch sie dargestellten Ort ermitteln.

Ist umgekehrt irgend eine krumme Linie — Kurve — durch irgend eine geometrische Eigenschaft erklärt, so ist es unsere Aufgabe, aus dieser Eigenschaft eine Gleichung abzuleiten, welche durch die Werte von m und n jedes Punktes in der Kurve erfüllt wird. Sind α und β Einheitsstrecken, so stellen bekanntlich m und n die Koordinaten des Punktes der Kurve dar.

Dritte Vorlesung.

Fortsetzung der Anwendungen der Addition von Strecken.

Wir haben in der vorhergehenden Vorlesung gefunden, dafs die Gleichung:

$$\varrho = f_1(t)\alpha + f_2(t)\beta = f(t)$$

eine Kurve in der Ebene α, β darstellt. Um die Gleichung einer Kurve im Raume zu erhalten, legen wir drei im Anfangspunkte sich schneidende Strecken, welche nicht in einer Ebene liegen, zu Grunde. Sind diese Strecken α, β, γ und $OA = m\alpha$, $OB = n\beta$, $OC = p\gamma$, und

$$OA + OB = OD, \quad OD + OC = OM$$
$$OA + OC = OE, \quad OE + OB = OM$$
$$OC + OB = OF, \quad OF + OA = OM$$

so ist:

$$OM = m\alpha + n\beta + p\gamma$$

und

$$OA \parallel BD \parallel FM \parallel CE, OB \parallel AD \parallel EM \parallel CF, OC \parallel AE \parallel DM \parallel BF.$$

Ist umgekehrt OM gegeben, so können wir diese Strecke in die Summe der Strecken $m\alpha$, $n\beta$, $p\gamma$ zerlegen. Wir brauchen nur zu ziehen $MD \parallel OC$, $MF \parallel OA$, $ME \parallel OB$.

Beschreibt der Punkt M eine Kurve, so durchlaufen D und F in den Ebenen von α und β, resp. β und γ bestimmte Kurven. Ist die Gleichung der Kurve, welche D beschreibt:

$$\varrho = f_1(t)\alpha + f_2(t)\beta,$$

so können wir die Gleichung der von F durchlaufenen Kurve schreiben:

$$\varrho = f_2(t)\beta + f_3(t)\gamma.$$

Denn es ist:

$$OF = OB + BF$$

oder

$$OF = f_2(t)\beta + p\gamma.$$

Da aber F eine Kurve beschreiben soll, so mufs zwischen p und $f_2(t)$ eine Gleichung bestehen, weshalb wir $p = f_3(t)$ setzen können.

Setzen wir den Wert $f_3(t)$ für p in OM ein, so stellt die Gleichung:

$$\varrho = f_1(t)\alpha + f_2(t)\beta + f_3(t)\gamma = F(t)$$

eine Kurve im Raume dar.

Sind hier α, β, γ Strecken von der Längeneinheit, so sind $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ die Koordinaten eines Punktes der Kurve.

Aus den drei Gleichungen:

$$m = f_1(t), \quad n = f_2(t), \quad p = f_3(t)$$

folgt:

$$m = \varphi_1(p), \quad n = \varphi_2(p).$$

Wir können hiermit sagen: „Eine Kurve im Raume wird durch die Gleichung $\varrho = m\alpha + n\beta + p\gamma$ dargestellt, wenn m und n (Koordinaten x, y) durch $p(z)$ mittelst der Gleichungen $m = \varphi_1(p)$, $n = \varphi_2(p)$ bestimmt sind, oder wenn m, n, p als abhängig von einer vierten Gröfse t betrachtet werden können."

Wenn aber zwischen m, n und p nur eine Gleichung besteht, so repräsentiert die Gleichung für ϱ eine Fläche.

Die Gleichung zwischen m, n und p sei $\psi(m, n, p) = 0$. Statt dieser einen Gleichung können wir die drei folgenden:

$$m = f_1(u, v), \quad n = f_2(u, v), \quad p = f_3(u, v)$$

einführen. Denn berechnen wir u und v aus den beiden ersten Gleichungen, so erhalten wir durch Einsetzung dieser Werte u, v in $f_3(u, v)$ den Wert p durch m und n bestimmt, also eine Gleichung zwischen den drei Gröfsen m, n, p. Setzen wir m, n, p in den Ausdruck für ϱ ein, so wird dieser zu:

$$\varrho = f_1(u, v)\alpha + f_2(u, v)\beta + f_3(u, v)\gamma = F(u, v).$$

Legen wir dem u einen numerischen Wert bei und lassen ihn für alle Werte, die man v giebt, konstant, so stellt diese Gleichung eine Kurve im Raume dar, welche natürlich auf dem geometrischen Bilde der Gleichung liegt. Die Gleichung $u =$ constant, zu der Gleichung $\varrho = F(u, v)$ hinzugefügt, drückt also eine gewisse Kurve auf dem Bilde der Gleichung aus. Lassen wir aber u eine sogenannte veränderliche Konstante, einen Parameter sein, so bekommen wir für jeden

Wert desselben eine solche Kurve auf dem Bilde der Gleichung; alle Werte von u zusammengefafst liefern also ein System von Kurven, von denen jede ganz auf dem Bilde der Gleichung liegt.

Legen wir dem v einen konstanten Wert bei, dafs also nur u sich ändert, so bekommen wir ebenfalls eine Kurve auf dem Orte der Gleichung $\varrho = F(u, v)$, und lassen wir v Parameter sein, so ergiebt der Inbegriff aller Werte desselben alle Kurven, welche dieser ersten analog sind. Wir haben durch diese Darstellung uns den Ort der Gleichung $\varrho = F(u, v)$ überzogen durch zwei Systeme von Kurven. Das eine System von Kurven entspricht der Gleichung $p = e$, das andere System von Kurven entspricht der Gleichung $q = e_1$.

Jeder Punkt des Bildes von $\varrho = F(u, v)$ können wir alsdann betrachten als Durchschnittspunkt einer Kurve des einen Systems und einer Kurve des andern Systems. Der Inbegriff aller dieser Punkte ergiebt eine Fläche, welche durch die Gleichung $\varrho = F(u, v)$ dargestellt wird.

Ist umgekehrt eine Fläche gegeben, so wird deren Gleichung die Form $\varrho = F(u, v)$ haben. Denken wir uns nämlich eine Fläche nach einem Gesetz gebildet und ziehen von einem Punkte M dieser Fläche, MD parallel γ, so trifft diese Gerade einen bestimmten Punkt der α, β-Ebene. Umgekehrt liegt über jedem Punkte der α, β-Ebene ein gewisser Punkt der Fläche, der ein bestimmtes Vielfaches von γ hat. Wir müssen also im Stande sein, aus den Gröfsen m und n eines Punktes der Fläche die betreffende Gröfse p zu finden. Es mufs also zwischen m, n und p eine Gleichung $\psi(m, n, p) = 0$ bestehen; hieraus folgen wieder die Gleichungen in u und v.

„Eine Fläche wird durch die Gleichung $\varrho = m\alpha + n\beta + p\gamma$ dargestellt, wenn m, n, p mittelst einer Gleichung $\psi(m, n, p) = 0$ verbunden sind, oder, was dasselbe ist, wenn m, n, p durch zwei beliebige Gröfsen u und v ausdrückbar sind."

Wir wollen die Gleichungen in Strecken umsetzen in Gleichungen von Punkten.

Die Gleichung:

$$\varrho = \alpha f_1(u, v) + \beta f_2(u, v) + \gamma f_3(u, v)$$

stellt eine Fläche dar, und nehmen wir eine der Gröfsen u, v als konstant an, eine Kurve.

Wenn $\varrho = OM$, $\alpha = OA$, $\beta = OB$, $\gamma = OC$ ist, so folgt aus

$$OM = OAf_1(u, v) + OBf_2(u, v) + OCf_3(u, v)$$
$$M = Af_1(u,v) + Bf_2(u,v) + Cf_3(u,v) - O[f_1(u,v) + f_2(u,v) + f_3(u,v) - 1].$$

Die Lage des Punktes M ist also auf vier Fundamentalpunkte O, A, B, C bezogen. Sind allgemein vier Fundamentalpunkte gegeben, die nicht in einer Ebene liegen, so führt

$$Am_1 + Bn_1 + Cp_1 + Oq_1 = Ms_1,$$

worin $m_1 + n_1 + p_1 + q_1 = s_1$ ist, stets zu einem fünften Punkte M, und es kann jeder Punkt M in die Summe von vier Punkten zerlegt werden. Soll der Punkt M die Fläche $\varrho = F(u, v)$ beschreiben, so mufs sein:

$$m_1 = s_1 f_1(u, v), \quad n_1 = s_1 f_2(u, v), \quad p_1 = s_1 f_3(u, v)$$

und

$$-q_1 = s_1 [f_1(u, v) + f_2(u, v) + f_3(u, v) - 1].$$

„Eine Fläche wird durch die Gleichung

$$Ms = Am + Bn + Cp + Oq, \quad s = m + n + p + q,$$

dargestellt, wenn die Koefficienten von A, B, C, O durch zwei Gröfsen u und v ausdrückbar sind; diese Fläche wird zu einer Kurve, wenn eine der Gröfsen u, v konstant ist.“

Da wir die Flächen und Kurven in Verbindung mit geraden Linien und Ebenen betrachten, so müssen wir notwendigerweise die Gleichung der Ebene ableiten und umgekehrt zeigen, wann eine Gleichung eine Ebene darstellt.

Es sei M ein beliebiger Punkt einer Ebene, dagegen R ein bestimmter Punkt der Ebene, so dafs ist:

$$OR = a\alpha + a_1\beta + a_2\gamma.$$

Ziehen wir OR_1 und OR_2 parallel der Ebene und setzen:

$$OR_1 = b\alpha + b_1\beta + b_2\gamma$$
$$OR_2 = c\alpha + c_1\beta + c_2\gamma,$$

dann ist jede Strecke OS der Ebene OR_1R_2 gegeben durch die Gleichung:

$$OS = u(b\alpha + b_1\beta + b_2\gamma) + v(c\alpha + c_1\beta + c_2\gamma).$$

Wir können u und v immer so bestimmen, dafs $RM \# OS$ ist, mithin ist

$$\varrho = OM = (a + bu + cv)\alpha + (a_1 + b_1 u + c_1 v)\beta + (a_2 + b_2 u + c_2 v)\gamma.$$

Lassen wir u, v alle möglichen Werte annehmen, so beschreibt der Punkt S die Ebene OR_1R_2 und M die gegebene parallele Ebene; es ist also der Ausdruck für OM die Gleichung der Ebene.

Besteht umgekehrt der Ausdruck für OM, so beschreibt M eine Ebene.

Wir zerlegen den Ausdruck in:

$$OS = u(b\alpha + b_1\beta + b_2\gamma) + v(c\alpha + c_1\beta + c_2\gamma) = uOR_1 + vOR_2$$
$$OR = a\alpha + a_1\beta + a_2\gamma.$$

Es stellt dann OS eine Gerade in der Ebene OR_2R_1 dar, und der Endpunkt M von

$$OM = OS + OR$$

liegt auf Geraden parallel der Ebene OR_1R_2, d. h. M beschreibt eine Ebene parallel der Ebene OR_1R_2.

Stellt die Gleichung:

$$\varrho = m\alpha + n\beta + p\gamma$$

eine Ebene dar, so mufs sein:

$$m = a + bu + cv,\ n = a_1 + b_1 u + c_1 v,\ p = a_1 + b_2 u + cv.$$

Denken wir uns nämlich die Ebene konstruiert und suchen ihre Gleichung, so lautet diese

$$\varrho = (a + bu + cv)\alpha + (a_1 + b_1 u + c_1 v)\beta + (a_2 + b_2 u + c_2 v)\gamma.$$

Durch Gleichsetzen der Koefficienten von α, β, γ erhalten wir die Relationen für m, n, p.

„Die Gleichung einer Ebene ist

$$\varrho = m\alpha + n\beta + p\gamma,$$

wenn m, n, p lineare Funktionen von u und v sind; und umgekehrt."

Ist M ein Punkt der Ebene, welche die Strecken $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $OC = \gamma$ in den Punkten A_1, B_1, C_1 schneidet, so dafs ist:

$$OA_1 = l_1\alpha, \quad OB_1 = l_2\beta, \quad OC_1 = l_3\gamma,$$

so ist:

$$\begin{aligned} \varrho = OM &= OA_1 + A_1M, \\ A_1M &= vA_1C_1 + uA_1B_1 \\ A_1C_1 &= A_1O + OC_1 \\ A_1B_1 &= A_1O + OB_1, \end{aligned}$$

mithin die Gleichung der Ebene:

$$\varrho = l_1\alpha + v(l_3\gamma - l_1\alpha) + u(l_2\beta - l_1\alpha)$$

oder

$$\varrho = l_1\alpha(1 - v - u) + ul_2\beta + vl_3\gamma.$$

Die Gleichungen der Ebenen, in welchen die Strecken α, β; α, γ; β, γ liegen, sind:

$$\varrho = u\alpha + v\beta, \quad \varrho = u\alpha + v\gamma, \quad \varrho = u\beta + v\gamma.$$

Sind die Gleichungen zweier Ebenen:

$$\varrho = m\alpha + n\beta + p\gamma$$
$$\varrho = m_1\alpha + n_1\beta + p_1\gamma,$$

so sind die Ebenen parallel, wenn die Gleichungen:

$$m = lm_1, \quad n = ln_1, \quad p = lp_1$$

bestehen.

Wir wollen die Gleichung einer Ebene noch auf eine andere Art ableiten.

Ziehen wir auf der Ebene eine Gerade PR, so können wir uns durch Parallelbewegung einer Geraden längs PR die Ebene entstanden denken. Die Gerade PR ist bestimmt durch den Punkt P und ihre Richtung PR; ist PR parallel der Geraden:

$$c\alpha + c_1\beta + c_2\gamma$$

und ist:

$$OP = a\alpha + a_1\beta + a_2\gamma,$$

so ist die Gleichung der Geraden:

$$\varrho_1' = (a\alpha + a_1\beta + a_2\gamma) + v(c\alpha + c_1\beta + c_2\gamma).$$

Es sei die Gerade, welche durch Parallelbewegung die Ebene erzeugt, parallel der Geraden

$$\varrho_1 = b\alpha + b_1\beta + b_2\gamma.$$

Ist M ein Punkt der Ebene, N ein Punkt der Geraden PR; und $NM \parallel \varrho_1$, dann ist

$$OM = ON + NM = OP + PN + NM = \varrho_1' + \varrho_1,$$

mithin

$$\varrho = (a + bu + cv)\alpha + (a_1 + b_1 u + c_1 v)\beta + (a_2 + b_2 u + c_2 v)\gamma$$

die Gleichung der Ebene.

Aehnlich dieser Ableitung der Gleichung der Ebene, können wir die Gleichung der geradlinigen Flächen, zu welchen die Ebene gehört, entwickeln. „Eine geradlinige Fläche ist eine solche, welche durch Bewegung einer Geraden entstanden ist.“

Es sei eine beliebige geradlinige Fläche gegeben, d. h. das Gesetz der Entstehung der Fläche sei bekannt. Nehmen wir auf der Fläche eine Kurve $\varrho = f(t)$ an, welche nicht mit einer Geraden der Fläche zusammenfällt, so können wir uns die Fläche entstanden denken durch Bewegung einer Geraden — Erzeugenden — längs dieser Kurve nach einem ganz bestimmten Gesetze. Um das Gesetz der Bewegung der Erzeugenden mittelst einer Gleichung bestimmen zu können, legen wir durch den Anfangspunkt der Strecken alle Parallelen mit der Erzeugenden, welche eine Kugel mit dem Radius von der Längeneinheit und dem Anfangspunkt der Strecken als Mittelpunkt nach einer gewissen Kurve schneiden werden. Ist das Bewegungsgesetz bekannt, so ist auch natürlich die Kurve auf der Kugel bestimmt, mithin auch die Gleichung der Kurve:

$$\varrho = \varphi(t),$$

wenn $\varphi(t)$ für jedes t absolut genommen gleich der Längeneinheit ist.

Durch einen Punkt B der Fläche geht im allgemeinen eine Erzeugende, welche die Curve $\varrho = f(t)$ in einem Punkte A schneide. Es ist also

$$OA = f(t),\ OA + AB = OB,$$

mithin, wenn wir OB gleich ϱ setzen und beachten, dafs AB einer Strecke $\varphi(t)$ parallel läuft:

$$\varrho = f(t) + v\varphi(t).$$

Sind in dieser Gleichung t und v variabel, so stellt sie die geradlinige Fläche dar.

Ist in der Gleichung der geradlinigen Fläche $t =$ konstant, so repräsentiert diese Gleichung alle Punkte einer Erzeugenden; bleibt aber v konstant, so stellt die Gleichung, wenn $f(t)$ einen beliebigen Punkt der Kurve $\varrho = f(t)$ bestimmt, alle Punkte auf der Fläche dar, welche von der Kurve $\varrho = f(t)$ längs einer Erzeugenden die konstante Entfernung v haben.

Ist $v = 0$, so ist $\varrho = f(t)$, diese Kurve heifst entweder „Kurve $v = 0$“ oder „Fundamentalkurve“.

Da v die Entfernung eines Punktes längs einer Erzeugenden von dem ihm entsprechenden Punkte der Fundamentalkurve angiebt, so können wir $v =$ konst. eine Kurve auf der Fläche bedeuten lassen, deren jeder Punkt von dem mit ihm auf derselben Erzeugenden liegenden Punkte der Fundamentalkurve eine konstante Entfernung hat.

Wird hier $f(t) = \varrho$ zu einem Punkte, so stellt die Gleichung $\varrho = f(t) + v\varphi(t)$ eine allgemeinste Kegelfläche dar; und wird $\varrho = \varphi(t)$ zu einer Geraden, so repräsentiert diese Gleichung eine allgemeinste Cylinderfläche.

Wir wollen ein Beispiel einer geradlinigen Fläche betrachten.

Die Gleichung der Fläche sei:

$$\varrho = (\alpha a + \beta b)t + (\alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma t)v.$$

Die Gleichung der Fundamentalkurve ist:

$$\varrho = (\alpha a + \beta b)t,$$

d. h. eine Gerade in der α, β-Ebene. Die Erzeugenden längs dieser Geraden laufen parallel den Strecken nach den Punkten der Kurve

$$\varrho = \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma t.$$

Diese Gleichung stellt aber jeden Punkt der Ebene, welche durch die Strecken $(\alpha a_1 + \beta b_1)$, γ bestimmt ist, dar, also laufen die Erzeugenden dieser Ebene parallel.

Die Gleichung der Fläche können wir aber auch schreiben:

$$\varrho = (\alpha a + \beta b + \gamma v)t + (\alpha a_1 + \beta b_1)v.$$

Betrachten wir als Fundamentalkurve die Gerade

$$\varrho = (\alpha a_1 + \beta b_1)v,$$

so laufen die Erzeugenden der Ebene, welche durch die Strecken $(\alpha a + \beta b)$, γ bestimmt ist, parallel.

Auf der vorliegenden Fläche liegen also zwei Schaaren von Geraden, von denen jede Schaar einer Ebene parallel ist. Die Fläche ist ein hyperbolisches Paraboloid.

Betrachten wir noch die Fläche, deren Gleichung ist:

$$\varrho = \alpha a t + (\beta \cos t + \gamma \sin t)v,$$

wenn $\alpha \perp \beta \perp \gamma$ ist, und diese Strecken die Länge 1 besitzen.

Die Fundamentalkurve ist die unbegrenzte Gerade α:

$$\varrho = \alpha a t,$$

und die Erzeugenden sind parallel der Ebene β, γ, d. h. sie stehen auf α senkrecht.

Aus der Gleichung der Fundamentalkurve folgt, dafs diese Fläche, Schraubenfläche genannt, dadurch entsteht, dafs eine Gerade auf einer andern stets normal bleibend sich an dieser so heraufbewegt, dafs die Höhen, um welche sie steigt, proportional sind den Winkeln, um welche sie sich dreht.

Vierte Vorlesung.

Die Grundrechnungsarten der Quaternionen.

Nachdem wir gezeigt haben, wie Linien nach Richtung und Gröfse addiert und subtrahiert werden können, müssen wir ihre Multiplikation und Division darlegen.

Wir gehen von der Division aus. Wir nehmen an, dafs der Quotient zweier sich schneidender Strecken α, β:

$$q = \frac{\beta}{\alpha}$$

eindeutig bestimmt sei. Aus dieser Gleichung folgt dann zur Erklärung der Multiplikation die Gleichung:

$$q \cdot \alpha = \frac{\beta}{\alpha}\,\alpha = \beta.$$

Der Quotient zweier Strecken $\frac{\beta}{\alpha}$ heifst nach Hamilton eine „Quaternion“.

Aus der letzten Gleichung folgt, dafs die Strecke α durch Multiplikation mit der Quaternion q übergeführt wird in die Strecke β und zwar nach Gröfse und Richtung. Um aber dies auszuführen ist erforderlich: 1) dafs die Länge a von α verwandelt wird in die Länge b von β, d. h. es mufs α entweder gestreckt oder verkürzt werden, bis es so grofs wie β ist; 2) mufs α so lange in der Ebene von α und β gedreht werden, bis es in die Richtung von β fällt.

Gesetzt q_1 wäre eine Quaternion, welche, mit α multipliziert, diese Strecke α nach β überführe. Dazu ist nötig, dafs, um kurz zu sprechen, q_1 in einer mit der Ebene $\alpha\beta$ parallelen Ebene operiere und zwar derart, dafs q_1 in demselben Verhältnis wie q die Strecke α an Länge verändere und um denselben Winkel wie q die Strecke α drehe. Wir setzen daher:

$$q = q_1 \text{ oder } \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$$

wenn ist:

$$\frac{b}{a} = \frac{b_1}{a_1},$$

$$\text{Winkel } \alpha\beta = \text{Winkel } \alpha_1\beta_1,$$

$$\text{Ebene } \alpha\beta \parallel \text{Ebene } \alpha_1\beta_1.$$

b, a, b_1, a_1 die absoluten Längen der Strecken β, α, β_1, α_1 bezeichnend. Hierdurch haben wir auch festgelegt, dafs eine Quaternion bestimmt ist durch vier Stücke:

1) Von den absoluten Längenverhältnissen der Strecken β und α.

2) Von dem Winkel zwischen α und β.

3) und 4) Von den zwei Bestimmungsstücken der „Lage“ der Ebene, in welcher α und β sich befinden.

Dafs die Lage der Ebene durch zwei Stücke bestimmt ist, ist leicht zu sehen. Wir fällen auf die Ebene eine Senkrechte, dann ist die Ebene durch diese Senkrechte festgelegt. Sind ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 drei aufeinander senkrechte Gerade, dann ist

$$\varrho = r_1\varrho_1 + r_2\varrho_2 + r_3\varrho_3$$

die Gleichung einer Geraden. Ist diese von der Länge 1, so ist:

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1.$$

Wir können durch Bestimmung von r_1 und r_2 bewirken, dafs diese Gerade der auf die Ebene senkrecht gezogenen Geraden parallel läuft.

Da wir die Quaternionen eindeutig bestimmt haben, so hat die Gleichung:

$$\frac{x}{\alpha} = \beta$$

nur eine Auflösung, welche wir erhalten, wenn wir beide Seiten mit α multiplizieren:

$$\frac{x}{\alpha} \cdot \alpha = \beta\alpha = x.$$

Es ist also:

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot \alpha = \frac{\beta \cdot \alpha}{\alpha}.$$

Die Quaternion $\frac{\beta}{\alpha}$ dreht und streckt durch Multiplikation nicht nur die Strecke α, sondern auch jede andere der Ebene von β und α parallel gehende Strecke γ. Wir können nämlich machen

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma},$$

$$\text{Ebene } \delta\gamma \parallel \text{Ebene } \beta\alpha$$

$$\measuredangle\, \alpha\beta = \measuredangle\, \gamma\delta$$

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot \gamma = \frac{\delta}{\gamma} \cdot \gamma = \delta.$$

Wir haben mithin

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot m\alpha = m\beta = m\left(\frac{\beta}{\alpha} \cdot \alpha\right) = \frac{m\,\beta}{\alpha} \cdot \alpha = \frac{m\beta\alpha}{\alpha}$$

und wir setzen:

$$\frac{\beta m}{\alpha} = m\,\frac{\beta}{\alpha}.$$

Sind β', α' Einheitsstrecken auf β, α, so ist

$$q = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{b\beta'}{a\alpha'} = \frac{b}{a}\,\frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\beta'}{\alpha'}\,\frac{b}{a}.$$

Wenn wir eine Strecke parallel der Ebene β, α mit $\frac{\beta'}{\alpha'}$ multiplizieren $\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\gamma\right)$, so wird diese Strecke um den Winkel $\alpha'\beta'$ gedreht. Deshalb heifst $\frac{\beta'}{\alpha'}$ der „Dreher oder Versor" und wird bezeichnet mit

$$\frac{\beta'}{\alpha'} = U\frac{\beta}{\alpha} = Uq.$$

Multiplizieren wir aber eine Strecke mit $\frac{b}{a}$, so bewirkt dies nur eine Längenänderung. Der Quotient $\frac{b}{a}$ heifst „Strecker oder Tensor" und in Zeichen:

$$\frac{b}{a} = T\frac{\beta}{\alpha} = Tq.$$

Die Quaternion ist also zerlegt in ein Produkt von Tensor und Versor:

$$q = Uq \cdot Tq = Tq \cdot Uq.$$

Dieselbe Bezeichnung wird auch gebraucht, wenn q eine Strecke darstellt. Es ist dann $T\alpha$ — der Tensor von α — gleich der Mafszahl der Länge von α, während $U\alpha$ — der Versor von α — eine Einheitslänge in der Richtung von α bezeichnet.

Aus der Definition der Quaternionen folgt:

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot \alpha + \frac{\beta_1}{\alpha} \cdot \alpha = \frac{\beta + \beta_1}{\alpha} \alpha.$$

Setzen wir voraus, dafs die Quaternion $\frac{\beta + \beta_1}{\alpha}$ nur mit der Schnittlinie der Ebenen $\beta\alpha$ und $\beta_1\alpha$ operieren soll, so können wir ohne Zweideutigkeit setzen:

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta_1}{\alpha} = \frac{\beta + \beta_1}{\alpha}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung können wir die Quaternion $\frac{\beta}{\alpha}$ zerlegen. Es sei $OB = \beta = b\beta'$, $OA = \alpha = a\alpha'$. Wir ziehen $BC \perp OA$, dann ist:

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OC + CB}{OA} = \frac{OC}{OA} + \frac{CB}{OA}$$

oder

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{a}\left(\cos\varphi\,\frac{\alpha'}{\alpha'} + \sin\varphi\,\frac{\delta'}{\alpha'}\right),$$

wenn φ der Winkel $\alpha\beta$ und δ eine Einheitsstrecke auf BC ist. Es ist aber klar, dafs $\frac{\alpha}{\alpha} = 1$. Wir haben also:

$$q = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{\alpha}\left(\cos\varphi + \sin\varphi\,\frac{\delta'}{\alpha'}\right).$$

Diese Quaternion soll aber nur mit der Schnittlinie der Ebenen $\beta\alpha$ und $\delta\alpha$ operieren, d. h. mit jeder Linie der Ebene $\alpha\beta$. Das reelle Glied der rechten Seite $\frac{b}{a}\cos\varphi$ heifst „Skalar" der Quaternion q und wird bezeichnet mit:

$$Sq = S\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{a}\cos\varphi.$$

Ist der Winkel $\varphi = 0$, d. h. fallen α und β in dieselbe Richtung, so reduziert sich die Quaternion auf einen Skalaren $\frac{b}{a}$.

Das zweite Glied der rechten Seite wird „Vektor" der Quaternion q genannt und in Zeichen:

$$Vq = V\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{a}\sin\varphi\,\frac{\delta}{\alpha}.$$

Ist $\varphi = 90^0$, so reduziert sich die Quaternion zu einem Vektoren.

Es ist:

$$Tq = \frac{b}{a}$$

$$Uq = \cos\varphi + \sin\varphi\,\frac{\delta'}{\alpha'}.$$

Durch unsere Zerlegung der Quaternion haben wir sie abhängig gemacht von einer Quaternion $\frac{\delta'}{\alpha'}$, deren Winkel ein rechter ist. Denken wir uns die Strecken OM und ON aufeinander senkrecht und $OM_1 = -OM$, $ON_1 = -ON$, so ist

$$\iota = \frac{OM}{ON} = \frac{ON}{OM_1} = -\frac{ON}{OM},$$

also

$$\frac{OM}{ON}\cdot\frac{OM}{ON} = \iota\iota = -\left(\frac{ON}{OM}\cdot\frac{OM}{ON}\right).$$

Hier tritt also das Produkt zweier Quaternionen auf.

Damit wir aber in Uebereinstimmung mit den Lehren der Arithmetik bleiben, nehmen wir an, dafs ist:

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma} \text{ und } \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\gamma} : \frac{\alpha}{\gamma};$$

oder in Einheitsstrecken:

$$\frac{b\beta'}{a\alpha'} \cdot \frac{a\alpha'}{b\gamma'} = \frac{b\beta'}{c\gamma'} = \frac{b}{c} \cdot \frac{\beta'}{\gamma'}.$$

Diese Annahme bedeutet nichts anderes, als dafs wir in dem Produkt

$$\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{\gamma} \cdot \gamma\right) = \left(\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\gamma}\right)\gamma$$

das associative Gesetz $a(bc) = (ab)c$ gelten lassen, d. h. die Ueberführung von γ in α und dann von α in β ist gleich der Ueberführung von γ in β.

Wir haben mithin:

$$\frac{OM}{ON} \cdot \frac{OM}{ON} = -1.$$

Da der Versor einer Quaternion, deren Winkel ein rechter ist, „Elementarversor" heifst, so haben wir den Satz:

„Das Produkt zweier gleichen Elementarversoren ist gleich der negativen Einheit."

Sind $\alpha\beta\gamma$ Strecken in derselben Ebene, so können wir setzen:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{a}\left(\cos\varphi + \sin\varphi\frac{\delta'}{\alpha'}\right),$$

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{a}{c}\left(\cos\psi + \sin\psi\frac{\delta'}{\alpha'}\right),$$

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{b}{c}\left(\cos(\varphi + \psi) + \sin(\varphi + \psi)\frac{\delta'}{\alpha'}\right),$$

wenn φ, ψ die Winkel $\alpha\beta$, $\gamma\alpha$ sind. Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\frac{b}{c}\left(\cos\varphi + \sin\varphi\frac{\delta'}{\alpha'}\right)\left(\cos\psi + \sin\psi\frac{\delta'}{\alpha'}\right)$$

$$= \frac{b}{c}\left(\cos(\varphi + \psi) + \sin(\varphi + \psi)\frac{\delta'}{\alpha'}\right).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung erhalten wir aber auch, wenn wir die linke Seite nach den gewöhnlichen Multiplikationsregeln auflösen und die Relation $\frac{\delta'}{\alpha'} \cdot \frac{\delta'}{\alpha'} = -1$ beachten.

Wir operieren also mit Quaternionen derselben Ebene resp. parallelen Ebenen ebenso, wie mit den komplexen Zahlen.

Wir können also sagen:

„Die Quaternionen derselben Ebene oder paralleler Ebenen werden nach denselben Gesetzen verknüpft, wie die komplexen Zahlen“, da wir den Satz auch für negative Winkel bestätigen.

Wir müssen betonen, dafs hier alle Quaternionen in derselben Ebene operieren, da die Gesetze für Quaternionen im Allgemeinen von denen der reellen Zahlen verschieden sind.

Wir hatten die Gleichung:

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}.$$

Vertauschen wir hier die Faktoren, so ändert das Produkt seinen Wert.

Um dies nachzuweisen, seien OA, OB, OC drei Einheitsstrecken und

$$OB = \beta', \quad OA = \alpha', \quad OC = \gamma',$$

dann ist:

$$q_2 = \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{OB}{OA}, \quad \frac{\gamma'}{\beta'} = \frac{OC}{OB} = q_1,$$

also:

$$q_1 \cdot q_2 = \frac{\gamma'}{\alpha'} = \frac{OC}{OA}.$$

Wir ziehen nun die Strecken OA', OC' in den Ebenen OAB und OBC so, dafs ist

$\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOA'$, $\sphericalangle BOC = \sphericalangle C'OB$;

wir haben dann:

Fig. 9.

$$q_2 = \frac{OA'}{OB},$$

$$q_1 = \frac{OB}{OC'},$$

also:

$$q_2 \cdot q_1 = \frac{OA'}{OC'}.$$

Die Quaternionen $\frac{OC}{OA}, \frac{OA'}{OC'}$ stimmen zwar in den Tensoren und den Drehungswinkeln überein, liegen aber in verschiedenen Ebenen; nur für den Fall, wenn α', β', γ' in der-

selben Ebene liegen, werden diese Quaternionen gleich, und es ist dann wie oben:

$$q_2 q_1 = q_1 q_2.$$

Da q_1 und q_2 nur Versoren sind, so müssen wir noch zeigen, dafs das Resultat zweier Quaternionen $q^1 . q^2$ nicht allgemein gleich ist dem von $q^2 . q^1$.

Es ist aber

$$q^1 . q^2 = Tq^1 . Uq^1 . Tq^2 . Uq^2 = Tq^1 . Tq^2 . q_1 . q_2$$
$$q^2 . q^1 = Tq^2 . Uq^2 . Tq^1 . Uq^1 = Tq^2 . Tq^1 . q_2 . q_1$$

womit der Nachweis geführt ist.

„Die Multiplikation der Quaternionen ist nicht commutativ (d. h. es ist $a . b$ nicht gleich $b . a$)."

Es bleibt noch übrig nachzuweisen, dafs das „distributive Prinzip":

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + cd$$

und das „associative Prinzip":

$$(a . b) c = a(b . c)$$

gilt.

Der Versor $\frac{\beta'}{\alpha'}$ dreht α' nach β' und der Versor $\frac{\alpha'}{\beta'}$ dreht β' nach α'. Diese beiden Versoren nennen wir „konjugierte Versoren" und bezeichnen dies mit:

$$K\frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\alpha'}{\beta'},\ K\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\beta'}{\alpha'},\ \text{und}\ KK\frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

Ist:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{a}\frac{\beta'}{\alpha'},$$

so heifst die Quaternion $\frac{b}{a}\frac{\alpha'}{\beta'}$ die zu $\frac{\beta}{\alpha}$ „konjugierte Quaternion" und in Zeichen:

$$K\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{a}\frac{\alpha'}{\beta'},\ KK\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Hieraus folgt sofort:

$$T\frac{\beta}{\alpha} = TK\frac{\beta}{\alpha}$$
$$U\frac{\beta}{\alpha} \cdot UK\frac{\beta}{\alpha} = 1.$$

„Konjugierte Quaternionen sind solche, welche dieselbe Ebene, denselben Tensor und gleiche aber entgegengesetzt gedrehte Winkel haben.“

Es sei

$$OB = \beta = b\beta', \quad OA = a\alpha', \quad BC \perp OA, \quad CB_2 = BC,$$

dann ist:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{a}\left(\cos\varphi + \sin\varphi\,\frac{\delta'}{\alpha'}\right),$$

$$K\frac{\beta}{\alpha} = \frac{OB_2}{OA} = \frac{OC + CB_2}{OA} = \frac{OC - CB}{OA},$$

daher, wenn δ' eine Einheitsstrecke auf CB ist:

$$K\frac{\beta}{a} = \frac{b}{a}\left(\cos\varphi - \sin\varphi\,\frac{\delta'}{\alpha'}\right).$$

Fig. 10.

Es ist aber:

$$K\frac{\delta'}{\alpha'} = -\frac{\delta'}{\alpha'},$$

denn da $\frac{\delta'}{\alpha'}$ ein Elementarversor ist, so ist:

$$\frac{\delta'}{\alpha'} \cdot \frac{\delta'}{\alpha'} = -1;$$

aufserdem besteht aber noch die Gleichung:

$$\frac{\delta'}{\alpha'} \cdot K\frac{\delta'}{\alpha'} = 1 = \frac{\delta'}{\alpha'}\left(-\frac{\delta'}{\alpha'}\right).$$

Wir können also schreiben:

$$K\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{a}\left(\cos\varphi + \sin\varphi\,.\,K\frac{\delta'}{\alpha'}\right).$$

Aus:

$$U\frac{\beta}{\alpha} \cdot UK\frac{\beta}{\alpha} = 1$$

folgt nun:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 \left(\cos\varphi + \sin\varphi\,\frac{\delta'}{\alpha'}\right)\left(\cos\varphi - \sin\varphi\,\frac{\delta'}{\alpha'}\right) = \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

oder

$$\frac{\beta}{\alpha}\,K\frac{\beta}{\alpha} = \left(T\frac{\beta}{\alpha}\right)^2.$$

Multiplicieren wir die linke Seite wie komplexe Zahlen, beachten $\frac{\delta'}{\alpha'} \cdot \frac{\delta'}{\alpha'} = -1$, so erhalten wir die rechte Seite. Der

Nachweis, dafs Quaternionen derselben Ebene wie komplexe Zahlen verknüpft werden, ist hiermit vollständig gegeben.

Für konjugierte Quaternionen bestehen die Gesetze:

$$K\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\beta_1}{\alpha}\right)=K\frac{\beta}{\alpha}+K\frac{\beta_1}{\alpha},$$

$$K\frac{\beta}{\alpha}\cdot K\frac{\delta}{\gamma}=K\left(\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

In einer Figur sei $OA = a\alpha'$, $OB = b\beta'$, $OC = b_1\beta_1'$, $OB+OC=OD=m\delta_2'$, $BB_1 \perp OA_1, CC_1, \perp OA_1, DD_1 \perp OA_1$ $\sphericalangle AOB = \varphi$, $\sphericalangle AOC = \psi$, $\sphericalangle AOD = \chi$. Es ist dann:

$$OB + OC = OB_1 + B_1B + OC_1 + C_1C$$
$$OD = OD_1 + D_1D,$$

also:

$$(OB_1 + OC_1 - OD_1) + (B_1B + C_1C - D_1D) = 0,$$

oder, wenn δ', δ_1', δ_2' Einheitsstrecken auf BB_1, CC_1, DD_1 sind:

$$(b\cos\varphi + b_1\cos\psi - m\cos\chi)\,\alpha'$$
$$+ (b\sin\varphi\,\delta' + b_1\sin\psi\,\delta_1' - m\sin\chi\,\delta_2') = 0.$$

Das erste Glied dieser Gleichung ist eine Strecke auf α und das zweite Glied stellt eine Strecke senkrecht auf α dar. Da aber die Summe zweier entgegengesetzt gerichteter Strecken nur als Resultat Null liefern kann, so besteht die Gleichung offenbar nur, wenn ist:

$$m\cos\chi = b\cos\varphi + b_1\cos\psi$$
$$m\sin\chi\,\delta_2' = b\sin\varphi\,\delta' + b_1\sin\psi\,\delta_1'.$$

Es ist nun:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{a}\left(\cos\varphi + \sin\varphi\,\frac{\delta'}{\alpha'}\right)$$

$$\frac{\beta_1}{\alpha} = \frac{b_1}{a}\left(\cos\psi + \sin\psi\,\frac{\delta'}{\alpha'}\right)$$

und

$$\frac{\beta+\beta_1}{\alpha} = \frac{m}{a}\left(\cos\chi + \sin\chi\,\frac{\delta_2'}{\alpha'}\right).$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir

$$K\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{a}\left(\cos\varphi - \sin\varphi\,\frac{\delta'}{\alpha'}\right)$$

$$K\frac{\beta_1}{\alpha} = \frac{b_1}{a}\left(\cos\psi - \sin\psi\,\frac{\delta_1'}{\alpha'}\right)$$

$$K\frac{\beta+\beta_1}{\alpha} = \frac{m}{a}\left(\cos\chi - \sin\chi\,\frac{\delta_2'}{\alpha'}\right).$$

Addieren wir aber $K\frac{\beta}{\alpha}$, $K\frac{\beta_1}{\alpha}$, so erhalten wir die letzte Gleichung. Um das zweite Gesetz der konjugierten Quaternionen abzuleiten, setzen wir:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{a}\cdot\frac{\beta_1'}{\alpha_1'},\quad \frac{\delta}{\gamma} = \frac{d}{c}\cdot\frac{\gamma_1'}{\beta_1'},$$

wenn die Ebenen der Quaternionen $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\delta}{\gamma}$ sich in der Geraden β_1 schneiden, $\sphericalangle\,\alpha\beta = \sphericalangle\,\alpha_1'\beta_1'$, $\sphericalangle\,\gamma\delta = \sphericalangle\,\beta_1'\gamma_1'$ und die accentuierten Buchstaben Einheitsstrecken bedeuten.

Es ist dann:

$$\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\beta}{\alpha} = \frac{bd}{ac}\cdot\frac{\gamma_1'}{\alpha_1'}$$

und

$$K\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\beta}{\alpha} = \frac{bd}{ac}\cdot\frac{\alpha_1'}{\gamma_1'}.$$

Es ist auch:

$$K\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{a}\cdot\frac{\alpha_1'}{\beta_1'}$$

$$K\frac{\delta}{\gamma} = \frac{d}{c}\cdot\frac{\beta_1'}{\gamma_1'}$$

mithin:

$$K\frac{\beta}{\alpha}\cdot K\frac{\delta}{\gamma} = \frac{bd}{ac}\cdot\frac{\alpha_1'}{\beta_1'}\cdot\frac{\beta_1'}{\gamma_1'} = \frac{bd}{ac}\cdot\frac{\alpha_1'}{\gamma_1'} = K\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\beta}{\alpha}.$$

Die beiden letzten Gesetze haben wir nur mit Hülfe der Annahme:

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta_1}{\alpha} = \frac{\beta+\beta_1}{\alpha}$$

$$\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}\ \left(\text{aber nicht } \frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\gamma}!\right)$$

abgeleitet.

Mit Hülfe dieser Annahme und den Sätzen über konjugierte Quaternionen können wir das distributive Gesetz entwickeln.

Es sei

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{a}\left(\cos\varphi + \sin\varphi\,\frac{\delta'}{\alpha'}\right) = \frac{b}{a}\left(\frac{\cos\varphi\,\alpha' + \sin\varphi\,\delta'}{\alpha'}\right).$$

Der Quotient $\frac{\delta'}{\alpha'}$ ist ein Elementarversor, welcher in der Ebene $\beta\alpha$ operiert. Die Ebene einer beliebigen Quaternion $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ schneide die Ebene $\alpha\beta$ in einer Geraden α_1; wir können dann setzen:

$$\frac{\delta'}{\alpha'} = \frac{\delta_1'}{\alpha_1'},\ \frac{\gamma}{\varepsilon} = \frac{\alpha_1'}{\varepsilon_1}$$

wenn

$$\sphericalangle\, \alpha_1'\delta_1' = \sphericalangle\, \alpha'\delta' = 1\,R,\ \sphericalangle\, \varepsilon\gamma = \sphericalangle\, \varepsilon_1\alpha_1',\ T\frac{\gamma}{\varepsilon} = T\frac{\alpha_1'}{\varepsilon_1}.$$

Es ist demnach:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{a}\left(\cos\varphi + \sin\varphi\,\frac{\delta_1'}{\alpha_1'}\right) = \frac{b}{a}\left(\frac{\cos\varphi\,.\,\alpha_1' + \sin\varphi\,.\,\delta_1'}{\alpha_1'}\right)$$

und

$$\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\gamma}{\varepsilon} = \frac{b}{a}\,\frac{\cos\varphi\,.\,\alpha_1' + \sin\varphi\,.\,\delta_1'}{\alpha_1'}\cdot\frac{\alpha_1'}{\varepsilon_1} = \frac{b}{a}\left(\frac{\cos\varphi\,.\,\alpha_1' + \sin\varphi\,.\,\delta_1'}{\varepsilon_1}\right)$$

$$= \frac{b}{a}\left(\cos\varphi\,\frac{\alpha_1'}{\varepsilon_1} + \sin\varphi\,\frac{\delta_1'}{\varepsilon_1}\right) = \frac{b}{a}\left(\cos\varphi\,\frac{\gamma}{\varepsilon} + \sin\varphi\,\frac{\delta_1'}{\alpha_1'}\,.\,\frac{\alpha_1'}{\varepsilon_1}\right)$$

$$= \frac{b}{a}\left(\cos\varphi\,\frac{\gamma}{\varepsilon} + \sin\varphi\,\frac{\delta'}{\alpha'}\cdot\frac{\gamma}{\varepsilon}\right).$$

und hieraus

$$\frac{b}{a}\left(\cos\varphi + \sin\varphi\,\frac{\delta'}{\alpha'}\right)\frac{\gamma}{\varepsilon} = \frac{b}{a}\left(\cos\varphi\,\frac{\gamma}{\varepsilon} + \sin\varphi\,\frac{\delta'}{\alpha'}\cdot\frac{\gamma}{\varepsilon}\right).$$

Nehmen wir auf beiden Seiten die Konjugierten, so ist:

$$\frac{b}{a}K\left(\cos\varphi + \sin\varphi\,\frac{\delta'}{\alpha'}\right)\frac{\gamma}{\varepsilon} = \frac{b}{a}K\cos\varphi\,\frac{\gamma}{\varepsilon} + \frac{b}{a}K\sin\varphi\,\frac{\delta'}{\alpha'}\cdot\frac{\gamma}{\varepsilon},$$

oder

$$\frac{b}{a}K\frac{\gamma}{\varepsilon}\cdot K\left(\cos\varphi + \sin\varphi\,\frac{\delta'}{\alpha'}\right) = \frac{b}{a}\cos\varphi\,K\frac{\gamma}{\varepsilon} + \frac{b}{a}\sin\varphi\,K\frac{\gamma}{\varepsilon}\cdot K\frac{\delta'}{\alpha'},$$

mithin, da die Konjugierten Quaternionen sind,

$$\frac{b}{a}\,\frac{\gamma^2}{\varepsilon_2}\left(\cos\varphi - \sin\varphi\,\frac{\delta'}{\alpha'}\right) = \frac{b}{a}\left(\frac{\gamma_2}{\varepsilon_2}\cos\varphi - \sin\varphi\,\frac{\gamma_2}{\varepsilon_2}\,\frac{\delta'}{\alpha'}\right).$$

Wenn wir von der Quaternion:

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{b}{a}\left(\cos\varphi - \sin\varphi\,\frac{\delta'}{\alpha'}\right)$$

ausgegangen wären, so hätten wir erhalten:

$$\frac{b}{a}\,\frac{\gamma_2}{\varepsilon_2}\left(\cos\varphi + \sin\varphi\,\frac{\delta'}{\alpha'}\right) = \frac{b}{a}\left(\frac{\gamma_2}{\varepsilon_2}\cos\varphi + \sin\varphi\,\frac{\gamma_2}{\varepsilon_2}\,\frac{\delta'}{\alpha'}\right).$$

Wir haben also allgemein die beiden Gleichungen

$$\frac{b}{a}\left(\cos\varphi + \sin\varphi\,\frac{\delta'}{\alpha'}\right)\frac{\gamma}{\varepsilon} = \frac{b}{a}\left(\cos\varphi\,\frac{\gamma}{\varepsilon} + \sin\varphi\,\frac{\delta'}{\alpha'}\cdot\frac{\gamma}{\varepsilon}\right)$$

$$\frac{\gamma}{\varepsilon}\,\frac{b}{a}\left(\cos\varphi + \sin\varphi\,\frac{\delta'}{\alpha'}\right) = \frac{b}{a}\left(\cos\varphi\,\frac{\gamma}{\varepsilon} + \sin\varphi\,\frac{\gamma}{\varepsilon}\cdot\frac{\delta'}{\alpha'}\right).$$

Zerlegen wir $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ in die Summe eines Skalaren und Vektoren:

$$\frac{\gamma}{\varepsilon} = \frac{c}{e}\left(\cos\psi + \sin\psi\cdot\frac{\eta'}{\varepsilon'}\right)$$

$\left(\frac{\eta'}{\varepsilon'}\right.$ ein Elementarversor in der Ebene $\left.\varepsilon\gamma\right)$

so ist

$$\frac{b}{a}\left(\cos\varphi + \sin\varphi\,\frac{\delta'}{\alpha'}\right)\frac{c}{e}\left(\cos\psi + \sin\psi\cdot\frac{\eta'}{\varepsilon'}\right)$$

$$= \frac{b}{a}\,\frac{c}{e}\left\{\cos\varphi\left(\cos\psi + \sin\psi\,\frac{\eta'}{\varepsilon'}\right) + \sin\varphi\,\frac{\delta'}{\alpha'}\left(\cos\psi + \sin\psi\cdot\frac{\eta'}{\varepsilon'}\right)\right\}$$

$$= \frac{b}{a}\cdot\frac{c}{e}\left\{\cos\varphi\,\cos\psi + \cos\varphi\,\sin\psi\,\frac{\eta'}{\varepsilon'} + \sin\varphi\,\cos\psi\,\frac{\delta'}{\alpha'}\right.$$

$$\left. + \sin\varphi\,\sin\psi\,\frac{\delta'}{\alpha'}\cdot\frac{\eta'}{\varepsilon'}\right\}.$$

Diese letzte Gleichung sagt aus, dafs für die Quaternionen das distributive Prinzip besteht.

Um noch das asssociative Prinzip nachzuweisen, müssen wir zeigen, was das Produkt zweier Strecken bedeute. Diese Frage werden wir in der folgenden Vorlesung untersuchen.

Fünfte Vorlesung.

Über das Produkt der Strecken.

Die Ebene ist bestimmt durch eine Strecke, welche senkrecht auf der Ebene steht. Die Ebene, in welcher eine Quaternion operiert, scheidet den Raum in zwei Teile; ein Auge, welches sich in dem einen der Teile befindet, erblickt die Drehung, welche die Quaternion ausführt, übereinstimmend mit der Uhrzeigerbewegung, während sie ihm von dem andern Teil aus umgekehrt erscheint. Ein Perpendikel, irgendwo auf der Ebene der Quaternion nach der Seite des Raumes errichtet, von welcher aus die Drehung mit der Uhrzeigerbe-

wegung übereinstimmt, heifst die „Achse“ der Quaternion, und eine Länge auf der Achse, welche gleich dem Tensor der Quaternion ist, können wir den „Achsentensor“ nennen. Die Strecke in der Richtung der Achse der Quaternion und von der Länge des Achsentensor heifst auch „Index“ der Quaternion.

Ist eine Quaternion gegeben, so ist auch deren Index bekannt. Wenn aber der Index gegeben, so ist die Quaternion nicht vollständig bestimmt. Durch den Index ist zwar die Ebene der Quaternion, deren Tensor und die Richtung — Sinn — ihrer Drehung bekannt, während der Winkel, um welchen die Quaternion dreht, unbestimmt ist.

Diese Unbestimmtheit heben wir dadurch auf, dafs einem gegebenen Index eine Quaternion entspricht, welche um einen rechten Winkel dreht. Es ist klar, dafs wir irgend einen anderen konstanten Winkel hier hätten annehmen können, aber bei unserer Zerlegung der Quaternion in einen Skalaren und einen Vektoren ist unsere Annahme die zweckmäfsigste.

Ist q eine Quaternion, welche um einen rechten Winkel dreht, so bezeichnen wir deren Index mit: Iq. Ist dieser Index gegeben, so ist die Quaternion q, welche „Elementarquaternion“ heifst, nach der Erklärung vollständig bestimmt.

Für die Indices der Elementarquaternionen bestehen die Sätze:

„Die Summe der Indices zweier Elementarquaternionen ist gleich dem Index der Summe dieser Quaternionen.“

„Der Quotient der Indices zweier Elementarquaternionen ist gleich dem Quotienten der beiden Quaternionen.“

Die beiden Ebenen der Elementarquaternionen schneiden sich in einer Geraden μ. Wir können dann, wenn μ gleich der Längeneinheit ist, für die gegebenen Elementarquaternionen setzen:

$$q_1 = \frac{\beta_1}{\mu}, \quad q_2 = \frac{\beta_2}{\mu}.$$

Da μ von der Längeneinheit ist, so sind die Längen der Indices gleich den Tensoren von β_1 und β_2, oder

$$TIq_1 = T\beta_1, \quad TIq_2 = T\beta_2.$$

Ist $Iq_1 = \delta_1$, $Iq_2 = \delta_2$, so liegen β_1, β_2, δ_1, δ_2, in einer

Ebene, auf welcher μ senkrecht steht. Da die Länge von δ_1 gleich der von β_1, die Länge von δ_2 gleich der von β_2, und der Winkel $\delta_2 \delta_1$ gleich dem Winkel $\beta_2 \beta_1$ ist, so folgt leicht, dafs $\delta_1 \pm \delta_2$ an Länge gleich $\beta_1 \pm \beta_2$ ist und auf $\beta_1 \pm \beta_2$ senkrecht steht; es ist daher $\delta_1 \pm \delta_2$ der Index der Quaternionen $\frac{\beta_1 \pm \beta_2}{\mu}$ oder in Zeichen:

$$Iq_1 \pm Iq_2 = I(q_1 \pm q_2).$$

Aus der Figur folgt aber weiter:

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{Iq_1}{Iq_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\frac{\beta_1}{\mu}}{\frac{\beta_2}{\mu}} = \frac{q_1}{q_2},$$

da wir früher annahmen:

$$\frac{\frac{\beta_1}{\mu}}{\frac{\beta_2}{\mu}} = \frac{\beta_1}{\beta_2}.$$

Die Quaternion q_1 ist vollständig unabhängig von q_2; sie ist aber bestimmt durch den Index Iq_1. Wir können daher ganz gut setzen:

$$q_1 = \frac{\delta_1}{n},$$

womit gegeben ist:

$$q_2 = \frac{\delta_2}{n}.$$

Aus der Formel für die Summe der Indices folgt:

$$\frac{\delta_1}{n} + \frac{\delta_2}{n} = \frac{\delta_1 + \delta_2}{n}.$$

Die unbekannte Gröfse n ist für alle Elementarquaternionen konstant. Denn sind q_1 und q_3 zwei Elementarquaternionen, so ist:

$$\frac{Iq_1}{Iq_3} = \frac{q_1}{q_3}$$

und da:

$$\frac{Iq_1}{n} = q_1,$$

so ist:

$$\frac{Iq_1}{Iq_3} = \frac{\frac{Iq_1}{n}}{q_3}.$$

Da diese Gleichung eindeutig sein soll, so mufs sein:

$$q_3 = \frac{Iq_3}{n}.$$

Unsere Aufgabe ist jetzt, die Operationen einer „Strecke dividiert durch die Gröfse n“ zu ermitteln.

Es seien OA, OB, OC drei aufeinander senkrecht stehende Strecken von der Längeneinheit und es sei:

$$\frac{OC}{OB} = \dot{i}_1, \quad \frac{OA}{OC} = \dot{i}_2, \quad \frac{OB}{OA} = \dot{i}_3,$$

so ist:

$$\dot{i}_1 = \frac{OA}{n}, \quad \dot{i}_2 = \frac{OB}{n}, \quad \dot{i}_3 = \frac{OC}{n}.$$

Aus der Figur sehen wir, dafs ist:

$$\frac{OC}{OB} = -\frac{OB}{OC},$$

also wie früher

$$\dot{i}_1 \cdot \dot{i}_1 = \frac{OA}{n} \cdot \frac{OA}{n} = -1$$

und ebenso:

$$\dot{i}_2 \cdot \dot{i}_2 = \frac{OB}{n} \cdot \frac{OB}{n} = -1$$

$$\dot{i}_3 \cdot \dot{i}_3 = \frac{OC}{n} \cdot \frac{OC}{n} = -1.$$

Es ist ferner:

$$\dot{i}_1 = \frac{OC}{OB} = -\frac{OB}{OC}$$

$$\dot{i}_2 = \frac{OA}{OC} = -\frac{OC}{OA},$$

also:

$$\dot{i}_1 \cdot \dot{i}_2 = \frac{OC}{n} \cdot \frac{OA}{n} = \frac{OB}{OA} = \dot{i}_3 = \frac{OC}{n}.$$

Ferner ist:

$$\dot{i}_2 = \frac{OA}{OC} = -\frac{OC}{OA},$$

$$\dot{i}_3 = \frac{OB}{OA} = -\frac{OA}{OB},$$

also:

$$\dot{i}_2 \cdot \dot{i}_3 = \frac{OB}{n} \cdot \frac{OC}{n} = \frac{OC}{OB} = \dot{i}_1 = \frac{OA}{n}.$$

Ebenso ist:

$$\dot{i}_3 = \frac{OB}{OA} = -\frac{OA}{OB},$$

$$\dot{i}_1 = \frac{OC}{OB} = -\frac{OB}{OC};$$

mithin:

$$\dot{i}_3 \,.\, \dot{i}_1 = \frac{OC}{n} \cdot \frac{OA}{n} = \frac{OA}{OC} = \dot{i}_2 = \frac{OB}{n}.$$

Wir haben aber auch:

$$\dot{i}_2 = \frac{OA}{OC}, \quad \dot{i}_1 = \frac{OC}{OB},$$

also

$$\dot{i}_2 \,.\, \dot{i}_1 = \frac{OB}{n} \cdot \frac{OA}{n} = \frac{OA}{OB} = -\frac{OB}{OA} = -\dot{i}_3 = -\frac{OC}{n}.$$

Aus

$$\dot{i}_3 = \frac{OB}{OA}, \quad \dot{i}_2 = \frac{OA}{OC}$$

folgt:

$$\dot{i}_3 \,.\, \dot{i}_2 = \frac{OC}{n} \cdot \frac{OB}{n} = \frac{OB}{OC} = -\frac{OC}{OB} = -\dot{i}_1 = \frac{OA}{n}.$$

Und aus den Gleichungen:

$$\dot{i}_1 = \frac{OC}{OB}, \quad \dot{i}_3 = \frac{OB}{OA}$$

folgt

$$\dot{i}_1 . \dot{i}_3 = \frac{OA}{n} \cdot \frac{OC}{n} = \frac{OC}{OA} = -\frac{OA}{OC} = -\dot{i}_2 = -\frac{OB}{n}.$$

Stellen wir diese Formeln zusammen, so haben wir:

$$\dot{i}_1 \dot{i}_1 = -1, \quad \dot{i}_2 \dot{i}_2 = -1, \quad \dot{i}_3 \dot{i}_3 = -1,$$

$$\dot{i}_1 \dot{i}_2 = \dot{i}_3, \quad \dot{i}_2 \dot{i}_3 = \dot{i}_1, \quad \dot{i}_3 \dot{i}_1 = \dot{i}_2,$$

$$\dot{i}_2 \dot{i}_1 = -\dot{i}_3 \quad \dot{i}_3 \dot{i}_2 = -\dot{i}_1, \quad \dot{i}_1 \dot{i}_3 = -\dot{i}_2,$$

und

$$\dot{i}_1 \dot{i}_2 \dot{i}_3 = -1.$$

Diese Formel ergiebt sich durch Multiplikation von $\dot{i}_3$ mit $\dot{i}_1 \dot{i}_2 = \dot{i}_3$; denn wir erhalten:

$$(\dot{i}_1 \dot{i}_2) \dot{i}_3 = \dot{i}_3 \dot{i}_3 = -1.$$

Es ist aber auch:

$$\dot{i}_1 (\dot{i}_2 \dot{i}_3) = \dot{i}_1 \dot{i}_1 = -1.$$

Für diese Quaternionen gilt also das assoziative Prinzip, welches allgemein gültig ist, wenn es für 3 Glieder bewiesen ist.

Setzen wir für die i die Gröfsen $\frac{OA}{n}$ etc. ein, so haben wir die Formeln:

$$\frac{OA}{n}\cdot\frac{OA}{n}=-1,\quad \frac{OB}{n}\cdot\frac{OB}{n}=-1,\quad \frac{OC}{n}\cdot\frac{OC}{n}=-1$$

$$\frac{OA}{n}\cdot\frac{OB}{n}=\frac{OC}{n},\quad \frac{OB}{n}\cdot\frac{OA}{n}=-\frac{OC}{n},\quad \frac{OA}{n}\cdot\frac{OB}{n}\cdot\frac{OC}{n}=-1,$$

aus welchen Gleichungen mit Hülfe der Multiplikationsregeln der allgemeinen Arithmetik die fehlenden folgen.

Durch O ziehen wir eine Strecke OM, welche wir nach den Achsen OA, OB, OC zerlegen.

Es ist dann

$$OM = OA\,.\,x + OB\,.\,y + OC\,.\,z.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{OM}{n}=\frac{OA}{n}x+\frac{OB}{n}y+\frac{OC}{n}z,$$

weil

$$\frac{\delta_1+\delta_2}{n}=\frac{\delta_1}{n}+\frac{\delta_2}{n}.$$

OM' sei die Einheitsstrecke auf OM und $OM = mOM'$. Es ist dann

$$\frac{OM}{n}=m\frac{OM'}{n}$$

und

$$\frac{OM}{n}\cdot\frac{OM}{n}=m^2\cdot\left(\frac{OM'}{n}\cdot\frac{OM'}{n}\right)=-m^2,$$

weil $\frac{OM'}{n}$ einen Elementarversor darstellt.

Wir haben mithin:

$$\frac{OM}{n}\cdot\frac{OM}{n}=\left(\frac{OA}{n}x+\frac{OB}{n}y+\frac{OC}{n}z\right)\left(\frac{OA}{n}x+\frac{OB}{n}y+\frac{OC}{n}z\right).$$

Multiplizieren wir hier auf der rechten Seite nach den Multiplikationsregeln der Arithmetik, beachten die Produkte der Gröfsen $\frac{OA}{n}$ etc. und dafs ist:

$$x^2+y^2+z^2=m^2,$$

so erhalten wir thatsächlich zum Resultat $-m^2$.

Sind OM und OM_1 zwei Strecken von den Längen m und m_1, so ist

$$\frac{OM}{n}\cdot\frac{OM_1}{n}=\frac{OM'}{n}\cdot\frac{OM_1'}{n}\cdot mm_1,$$

$\frac{OM'}{n}$ repräsentiert einen Elementarversor $\frac{OM'}{\mu}$, und $\frac{OM_1'}{n}$ einen solchen Versor $\frac{OM_1'}{\mu}$, es ist aber:

$$\frac{OM_1'}{\mu} = -\frac{\mu}{OM_1'},$$

also:

$$\frac{OM}{n} \cdot \frac{OM_1}{n} = -mm_1 \cdot \frac{OM'}{OM_1'} = -mm_1 \cdot \left(\cos\varphi + \frac{OP}{n}\sin\varphi\right),$$

wenn $\varphi = \sphericalangle M_1'OM$ ist und OP eine Einheitsstrecke senkrecht auf die Ebene OMM_1, von deren Endpunkt wir die Drehung von M_1' um den Winkel φ nach M' im Sinne des Uhrzeigers sehen.

Zerlegen wir OM und OM_1 nach den Achsen OA, OB, OC und ist:

$$OM = xOA + yOB + zOC$$
$$OM_1 = x_1OA + y_1OB + z_1OC,$$

so ist

$$\frac{OM}{n} \cdot \frac{OM_1}{n} = -mm_1\left(\cos\varphi + \frac{OP}{n}\sin\varphi\right)$$
$$= \left(x\frac{OA}{n} + y\frac{OB}{n} + z\frac{OC}{n}\right)\left(x_1\frac{OA}{n} + y_1\frac{OB}{n} + z_1\frac{OC}{n}\right).$$

Multiplizieren wir die rechte Seite aus, so erhalten wir:

$$-(xx_1 + yy_1 + zz_1) + \frac{OA}{n}(yz_1 - zy_1) + \frac{OB}{n}(zx_1 - xz_1)$$
$$+ \frac{OC}{n}(y_1x - yx_1).$$

Aus der analytischen Geometrie ist aber bekannt:

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = mm_1\cos\varphi$$
$$\frac{(yz_1 - zy_1)^2 + (zx_1 - xz_1)^2 + (y_1x - yx_1)^2}{mm_1^2} = \sin^2\varphi$$

und wir können setzen:

$$-(zx_1 - xz_1) = mm_1\sin\varphi\,.\,\eta, \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$
$$-(yz_1 - zy_1) = mm_1\sin\varphi\,.\,\xi, \qquad \xi x + \eta y + \zeta z = 0$$
$$-(xy_1 - yx_1) = mm_1\sin\varphi\,.\,\zeta, \qquad \xi x_1 + \eta y_1 + \zeta z_1 = 0$$

Es ist daher die Strecke:

$$OA\,.\,\xi + OB\,.\,\eta + OC\,.\,\zeta = OP$$

von der Längeneinheit und steht auf der Ebene OMM_1 senkrecht. Bilden wir ebenso $\frac{OM_1}{n} \cdot \frac{OM}{n}$, so erhalten wir:

$$\frac{OM_1}{n} \cdot \frac{OM}{n} = -mm_1\left(\cos\varphi - \frac{OP}{n}\sin\varphi\right).$$

Wir haben auch:

$$\frac{OM}{OM_1} = m \cdot m_1\left(\cos\varphi + \frac{OP}{n}\sin\varphi\right)$$

$$= mm_1\left(\cos\varphi + \sin\varphi\,\frac{OA\cos\varphi_1 + OB\cos\varphi_2 + OC\cos\varphi_3}{n}\right),$$

wenn OP mit OA, OB, OC die Winkel φ_1, φ_2, φ_3 bildet.

Wir sehen also durch vollständige Multiplikation der Glieder:

$$\frac{OAx + OBy + OCz}{n} \cdot \frac{OAx_1 + OBy_1 + OCz_1}{n},$$

dafs das distributive Prinzip besteht. Es gilt aber auch das assoziative Prinzip, weil dieses Prinzip für das Produkt

$$\frac{OA}{n} \cdot \frac{OB}{n} \cdot \frac{OC}{n}$$

gültig ist.

In der letzten Vorlesung hatten wir für das Produkt zweier Quaternionen gefunden:

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\gamma}{\varepsilon} = \frac{bc}{ae}\left(\cos\varphi \cdot \cos\psi + \cos\varphi \cdot \sin\psi\,\frac{\eta'}{\varepsilon'} + \sin\varphi \cdot \cos\psi\,\frac{\delta'}{\alpha'}\right.$$
$$\left. + \sin\varphi \cdot \sin\psi\,\frac{\delta'}{\alpha'} \cdot \frac{\eta'}{\varepsilon'}\right).$$

Hier sind $\frac{\eta'}{\varepsilon'}$, $\frac{\delta'}{\alpha'}$ Elementarversoren; sind deren Indices OE, OD, so ist

$$\frac{\eta'}{\varepsilon'} = \frac{OE}{n},\quad \frac{\delta'}{\alpha'} = \frac{OD}{n}$$

und

$$\frac{\delta'}{\alpha'} \cdot \frac{\eta'}{\varepsilon'} = \frac{OE}{n} \cdot \frac{OD}{n} = -\frac{OE}{OD} = -\left(\cos\chi + \frac{OF}{n}\sin\chi\right).$$

OF ist eine Einheitsstrecke senkrecht auf der Ebene OED, von deren Endpunkt F wir die Drehung von D nach E um den Winkel χ im Sinne des Uhrzeigers sehen.

Das Produkt der Quaternionen ist mithin gleich:

$$p\Big(\cos\varphi \,.\, \cos\psi - \sin\varphi \,.\, \sin\psi \,.\, \cos\chi$$
$$+ \frac{\cos\varphi \,.\, \sin\psi \,.\, OE + \sin\varphi \,.\, \cos\psi \,.\, OD - \sin\varphi \,.\, \sin\psi \,.\, \sin\chi \,.\, OF}{n}\Big)$$

also wieder eine Quaternion.

Wenn wir in diesen Ableitungen die unbekannte Gröfse n gleich der Einheit setzen, mithin:

$$OA = i_1, \quad OB = i_2, \quad OC = i_3,$$

so erhalten wir natürlich dieselben Resultate.

Durch diese Annahme $n = 1$, sind wir auf die Definition Hamiltons gekommen:

$$Iq_1 \,.\, Iq_2 = q_1 \,.\, q_2$$

und

$$Iq_1 = q_1,$$

wenn q_1 und q_2 Elementarquaternionen sind.

Wir haben jetzt die Gleichungen:

$$\frac{i_3}{i_2} = i_1, \quad \frac{i_1}{i_3} = i_2, \quad \frac{i_2}{i_1} = i_3, \quad i_1^2 = -1, \quad i_2^2 = -1, \quad i_3^2 = -1$$

und

$$i_1 i_2 = i_3, \quad i_2 i_3 = i_1, \quad i_3 i_1 = i_2.$$

Nennen wir die Seite einer Ebene „positive Seite“, von welcher aus die Drehungen in der Ebene übereinstimmend mit der Uhrzeigerbewegung gesehen werden, so haben wir den Satz:

„Das Produkt zweier zu einander senkrechten (Einheits)-Strecken ist eine dritte auf der positiven Seite der Ebene der Faktoren senkrechte (Einheits)Strecke.“

„Der Quotient zweier zu einander senkrechten (Einheits)-Strecken ist eine dritte auf der Ebene der beiden Strecken senkrechte (Einheits)Strecke.“

„Das Quadrat einer Einheitsstrecke ist gleich -1.“

Ist β eine Strecke von der Länge b, so können wir setzen:

$$\beta = b \,.\, \beta',$$

also:

$$\beta \,.\, \beta = b^2 \,.\, \beta' \,.\, \beta' = -b^2.$$

„Das Quadrat einer Strecke von der Länge b ist gleich $-b^2$, oder in Zeichen: $\beta^2 = -(T\beta)^2$.

Ist i eine Einheitsstrecke auf der positiven Seite der Ebene der Quaternion $\frac{\beta}{\alpha}$, so ist:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{a}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

und wie oben:

$$\beta \,.\, \alpha = -\, b \,.\, a(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$\alpha \,.\, \beta = b \,.\, a(-\cos\varphi + i\sin\varphi)\,.$$

Aus dem Grunde, weil $\frac{b}{\alpha}\sin\varphi \,.\, i$ eine Strecke ist, heißt, wie wir schon erwähnten, dieses Glied der Quaternion ein Vektor (Strecke). Zerlegen wir i nach den Achsen OA, OB, OC, so ist

$$i = x_1 i_1 + y_1 i_2 + z_1 i_3\,, \quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = -1$$

und

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{a}[\cos\varphi + \sin\varphi(x_1 i_1 + y_1 i_2 + z_1 i_3)]\,.$$

Wir können jetzt setzen:

$$\frac{b}{a}\cos\varphi = T\frac{\beta}{\alpha}\cos\varphi = w$$

$$\frac{b}{a}x_1\sin\varphi = T\frac{\beta}{\alpha}x_1\sin\varphi = x$$

$$\frac{b}{a}y_1\sin\varphi = T\frac{\beta}{\alpha}y_1\sin\varphi = y$$

$$\frac{b}{a}z_1\sin\varphi = T\frac{\beta}{\alpha}z_1\sin\varphi = z\,.$$

Die Quaternion ist hiermit auf eine viergliedrige Form:

$$q = \frac{\beta}{\alpha} = w + i_1 x + i_2 y + i_3 z$$

ihre „Normalform“ gebracht.

Wir können die i sowohl als Strecken, wie als Elementarversoren betrachten.

Aus der Gleichung:

$$\alpha = \beta \,.\, \cos\varphi + \gamma \,.\, \sin\varphi\,,$$

wenn α, β, γ Einheitsvektoren derselben Ebene sind, können wir unter Voraussetzung des assoziativen und distributiven Princips die Formeln für $\alpha\beta$, $\beta\alpha$ und $\frac{\beta}{\alpha}$ entwickeln.

Aus der Gleichung folgt:

$$\alpha\beta = \beta^2 . \cos\varphi + \gamma\beta . \sin\varphi = -\cos\varphi + i\sin\varphi,$$

wenn i senkrecht auf $\gamma\beta$ ist.

$$\beta\alpha = \beta^2\cos\varphi + \beta\gamma\sin\varphi = \beta^2\cos\varphi - \gamma\beta\sin\varphi = -\cos\varphi - i\sin\varphi$$

$$\frac{\beta}{\alpha} . \alpha\beta = +\beta . \beta = -1$$

oder

$$\frac{\beta}{\alpha}(-\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = -(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

und endlich

$$\frac{\beta}{\alpha} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Aus der Normalform

$$q = w + i_1 x + i_2 y + i_3 z$$

folgt:

$$Sq = w$$

$$Vq = i_1 x + i_2 y + i_3 z$$

oder

$$Sq = \frac{b}{a}\cos\varphi$$

$$Vq = \frac{b}{a}\sin\varphi . i$$

und

$$TVq = \frac{b}{a}\sin\varphi.$$

Aus der letzten Gleichung ergiebt sich:

$$(TVq)^2 = \frac{b^2}{a^2}\sin^2\varphi = -(Vq)^2,$$

$$(Tq)^2 = \frac{b^2}{a^2} = (TSq)^2 + (TVq)^2 = (Sq)^2 - (Vq)^2.$$

Es ist aber:

$$(Vq)^2 = -x^2 - y^2 - z^2,$$

mithin:

$$(Tq)^2 = w^2 + x^2 + y^2 + z^2,$$

$$Tq = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}.$$

Es ist aber auch

$$q = Tq . Uq$$

also

$$Uq = \frac{w + i_1 x + i_2 y + i_3 z}{\sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Sind β' und α' aufeinander senkrecht, so ist:

$$\frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{b'}{a'} \, i$$

und die konjugierte Quaternion ist definiert durch die Gleichung

$$K \frac{\beta'}{\alpha'} = - \frac{b'}{a'} \, i,$$

d. h. der „konjugierte Vektor eines Vektors ist der negative Vektor".

Sechste Vorlesung.

Formale Theorie der Quaternionen. Differentation der Quaternionen.

Unter einer Quaternion verstehen wir nach dem früheren den Ausdruck:

$$q = w + x i_1 + y i_2 + z i_3$$

wenn i_1, i_2, i_3 folgenden Relationen genügen:

$$i_1 \,.\, i_1 = -1, \quad i_2 \,.\, i_2 = -1, \quad i_3 \,.\, i_3 = -1, \quad i_1 \,.\, i_2 = i_3,$$

und das associative und distributive Gesetz gelten.

Aus den Gleichungen:

$$q_1 = w_1 + x_1 i_1 + y_1 i_2 + z_1 i_3$$
$$q_2 = w_2 + x_2 i_1 + y_2 i_2 + z_2 i_3$$
$$q_3 = w_3 + x_3 i_1 + y_3 i_2 + z_3 i_3$$

erhalten wir:

$$q_1 = q_n,$$

wenn $w_1 = w_n$, $x_1 = x_n$, $y_1 = y_n$, $z_1 = z_n$ und

$$q_1 \cdot q_2 = q_3,$$

wenn wir setzen:

$$w_1 w_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2 = w_3$$
$$w_1 x_2 + x_1 w_2 + y_1 z_2 - z_1 y_2 = x_3$$
$$w_1 y_2 - x_1 z_2 + y_1 w_2 + z_1 x_2 = y_3$$
$$w_1 z_2 + x_1 y_2 - y_1 x_2 + z_1 w_2 = z_3.$$

Es ist aber auch:

$$q_1 . q_2 \quad (Sq_1 + Vq_1)(Sq_2 + Vq_2) \quad Sq_1 Sq_2 + Sq_2 Vq_1 + Sq_1 Vq_2 + Vq_1 Vq_2$$

und

$$q_2 \cdot q_1 = Sq_1 Sq_2 + Sq_2 \, Vq_1 + Sq_1 \, Vq_2 + Vq_2 Vq_1 .$$

Beide Produkte unterscheiden sich nur durch das Glied $Vq_1 \cdot Vq_2$ und $Vq_2 \cdot Vq_1$.

Bilden wir diese Produkte, so ist:

$$Vq_1 . Vq_2 = -(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) + (y_1 z_2 - y_2 z_1) i_1 + (z_1 x_2 - z_2 x_1) i_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) i_3$$

$$Vq_2 . Vq_1 = -(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) - (y_1 z_2 - y_2 z_1) i_1 - (z_1 x_2 - z_2 x_1) i_2 - (x_1 y_2 - x_2 y_1) i_3 .$$

Es ist also:

$$S(Vq_1 \, . \, Vq_2) = S(Vq_2 \, . \, Vq_1)$$

$$V(Vq_1 \, . \, Vq_2) = - \, V(Vq_2 \, . \, Vq_1)$$

und

$$q_1 . q_2 = Sq_1 Sq_2 + Sq_1 \, Vq_2 + Sq_2 \, Vq_1 + S(Vq_1 \, Vq_2) + V(Vq_1 \, Vq_2)$$

$$q_2 . q_1 = Sq_1 Sq_2 + Sq_1 \, Vq_2 + Sq_2 \, Vq_1 + S(Vq_1 \, Vq_2) - V(Vq_1 \, Vq_2) .$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir:

$$Sq_1 q_2 = S q_2 q_1$$

$$Vq_1 q_2 + Vq_2 q_1 = 2(Sq_1 \, Vq_2 + Sq_2 \, Vq_1) .$$

Als die zu q_1 konjugierte Quaternion haben wir bezeichnet:

$$Kq_1 = Sq_1 - Vq_1 ,$$

also ist:

$$2 \, Sq_1 = q_1 + Kq_1$$

$$2 \, Vq_1 = q_1 - Kq_1 .$$

Es ist:

$$q_1 \cdot Kq_1 = (Sq_1 + Vq_1)(Sq_1 - Vq_1) = (Sq_1)^2 - (Vq_1)^2 = w_1^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = (Tq_1)^2 ,$$

$(Tq_1)^2$ wird auch die „Norm“ der Quaternion genannt: Nq_1.

Setzen wir:

$$q_1 \cdot q_2 = q_3 , \quad K(q_1 \cdot q_2) = Kq_2 \, . \, Kq_1 = K\gamma$$

so ist

$$(q_1 \cdot q_2) \, Kq_1 q_2 = (q_1 q_2) \, Kq_2 \, . \, Kq_1 = Nq_3$$

oder

$$Nq_1 \,.\, Nq_2 = Nq_3,$$

so dafs ist;

$$(w_1^2+x_1^2+y_1^2+z_1^2)(w_2^2+x_2^2+y_2^2+z_2^2)=w_3^2+x_3^2+y_3^2+z_3^2.$$

Ferner können wir setzen:

$$Tq_1 = \sqrt{w_1^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},$$

$$Uq_1 = \frac{w_1 + i_1 x_1 + i_2 y_1 + i_3 z_1}{\sqrt{w_1^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}},$$

$$\iota = \frac{i_1 x_1 + i_2 y_1 + i_3 z_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}},$$

$$\iota \,.\, \iota = -1,$$

$$\frac{w_1}{\sqrt{w_1^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} = \cos\varphi, \quad \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}{\sqrt{w_1^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} = \sin\varphi.$$

$$q_1 = Tq_1 (\cos\varphi + \iota \sin\varphi)$$

$$q_1^n = (Tq_1)^n (\cos n\varphi + \iota \sin\varphi).$$

Unter dem Quotienten $\frac{q_2}{q_1}$ haben wir eine solche Quaternion q_4 zu verstehen, dafs ist

$$q_4 \cdot q_1 = q_2, \quad q_4 = \frac{q_2}{q_1}.$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$q_4 \cdot q_1 \,.\, Kq_1 = q_2 \,.\, Kq_1$$

oder

$$q_4 \,.\, Nq_1 = q_2 Kq_1.$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\begin{aligned}
Nq_1 \,.\, w_4 &= w_2 w_1 + x_2 x_1 + y_2 y_1 + z_2 z_1 \\
Nq_1 \,.\, x_4 &= x_2 w_1 - w_2 x_1 + z_2 y_1 - y_2 z_1 \\
Nq_1 \,.\, y_4 &= y_2 w_1 - z_2 x_1 - w_2 y_1 + x_2 z_1 \\
Nq_1 \,.\, z_4 &= z_2 w_1 + y_2 x_1 - x_2 y_1 - w_2 z_1.
\end{aligned}$$

Es ist:

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{q_2 Kq_1}{Nq_1},$$

also:

$$\frac{1}{q_1} = \frac{Kq_1}{Nq_1}$$

und daher:

$$q_2 \cdot \frac{1}{q_1} = q_2 \cdot \frac{Kq_1}{Nq_1} = \frac{q_2 Kq_1}{Nq_1} = \frac{q_2}{q_1}.$$

Wir haben:

$$q_1 \cdot \frac{q_2}{q_3} = q_1 \frac{q_2 Kq_3}{Nq_3} = \frac{q_1 \cdot q_2 \cdot Kq_3}{Nq_3} = \frac{q_1 \cdot q_2}{q_3},$$

und:

$$\frac{\left(\frac{q_1}{q_2}\right)}{q_3} = \frac{\frac{q_1}{q_2} Kq_3}{Nq_3} = \frac{q_1 \cdot Kq_2 \cdot Kq_3}{Nq_2 \cdot Nq_3} = \frac{q_1 \cdot K(q_3 q_2)}{Nq_2 \cdot Nq_3} = \frac{q_1}{q_3 \cdot q_2}.$$

Endlich haben wir noch:

$$\frac{q_1}{\left(\frac{q_2}{q_3}\right)} = \frac{q_1 Nq_3}{q_2 Kq_3} = \frac{q_1 K(q_2 Kq_3)}{Nq_2} = \frac{q_1 K(Kq_3) Kq_2}{Nq_2}$$

$$= \frac{q_1 \cdot q_3 \cdot Kq_2}{Nq_2} = \frac{q_1 \cdot q_2}{q_3}.$$

Hieraus finden wir leicht, dafs ist:

$$\frac{q_1}{q_2} \cdot \frac{q_2}{q_3} = \frac{q_1}{q_3}.$$

Denn es ist:

$$\frac{q_1}{q_2} \cdot \frac{q_2}{q_3} = q_1 \frac{1}{q_2} \cdot q_2 \cdot \frac{1}{q_3} = q_1 \cdot \frac{1}{q_3} = \frac{q_1}{q_3}.$$

Ebenso ist:

$$\frac{q_1}{q_2} \cdot \frac{q_2}{q_3} \cdot \frac{q_3}{q_1} = 1.$$

Dagegen sind folgende Gleichungen:

$$q_1 \cdot \frac{q_2}{q_1} = q_2, \quad \frac{q_1 \cdot q_2}{q_1} = q_2, \quad \frac{q_1}{\left(\frac{q_2}{q_3}\right)} = \frac{q_1}{q_2} \cdot q_3$$

nicht wahr.

Nachdem wir so die Rechnungsarten der Quaternionen rekapituliert haben, wollen wir sehen, wie Quaternionen differentiiert werden. Die Differentialquotienten der Quaternionen treten in der Anwendung häufig auf, sei es bei Aufsuchung der Gleichung der Tangente an eine Kurve, sei es bei einem Problem der Physik oder Mechanik.

Haben wir eine Quaternion:

$$q = w + i_1 x + i_2 y + i_3 z,$$

wo w, x, y, z Funktionen einer Veränderlichen t sind, und bezeichnen wir durch $q + dq$ die Quaternion, welche aus q entsteht, wenn t um dt zunimmt; es ist dann

$$dq = dw + i_1 dx + i_2 dy + i_3 dz.$$

dq heifst „Differential" von q.

Aus dieser Gleichung folgt:

$$Sdq = dSq, \quad Vdq = dVq.$$

Wir können sagen: „Das Symbol d ist kommutativ mit den Zeichen S und V."

Ist p eine Funktion von q, so definieren wir das Differential dp mittelst der Gleichung:

$$dp = df(q) = \lim_{h=0} \frac{f(q + hdq) - f(q)}{h},$$

in welcher Gleichung h eine reelle von q unabhängige Gröfse ist. Diese Definition enthält als speziellen Fall die gewöhnliche Definition von $df(q)$, wenn q eine reelle Veränderliche ist.

Ist $f(q)$ eine constante Gröfse, so ist hiernach:

$$dc = 0.$$

Ist $f(q) = c\varphi(q)$ so ist:

$$dc\varphi(q) = cd\varphi(q)$$

und

$$d[\varphi(q)c] = [d\varphi(q)]c.$$

Wir erhalten weiter die Relation:

$$d[F_1(q) + F_2(q) + F_3(q) \ldots] = dF_1(q) + dF_2(q) + dF_3(q) \ldots$$

Ist $f(q) = \varphi(q)\psi(q)$, so ist:

$$dp = \lim_{h=0} \frac{\varphi(q + hdq)\,\psi(q + hdq) - \varphi(q)\,\psi(q)}{h}$$

$$= \lim_{h=0} \frac{\varphi(q+hdq)\,\{\psi(q+hdq) - \psi(q)\} + \{\varphi(q+hdq) - \varphi(q)\}\,\psi(q)}{h}$$

$$= \varphi(q)\,d\psi(q) + d\varphi(q)\psi(q),$$

also

$$d[\varphi(q)\,.\,\psi(q)] = \varphi(q)\,.\,d\psi(q) + d\varphi(q)\,.\,\psi(q).$$

Ist $\varphi(q) = \psi(q) = q^2$, so ist

$$dq^2 = q\,.\,dq + dq\,.\,q.$$

Ist $f(q) = q^n$, wenn n eine ganze Zahl ist, so ist

$$dq^n = d(q \,.\, q^{n-1}), = dq \,.\, q^{n-1} + q \,.\, dq^{n-1}$$
$$= dq \,.\, q^{n-1} + q dq \,.\, q^{n-2} + q^2 dq \,.\, q^{n-3} + \ldots + q^{n-1} dq \,.$$

Wir können definieren: $\frac{1}{q^n} = q^{-n}$. Ist $n = 1$, so heifst q^{-1} die zu q „reziproke Quaternion“.

Ist

$$p = q^{-1}$$

so suchen wir das Differential von

$$q \,.\, q^{-1} = 1$$

und erhalten:

$$dq \,.\, q^{-1} + q \,.\, dq^{-1} = 0$$

und hieraus

$$dq^{-1} = - q^{-1} \,.\, dq \,.\, q^{-1} \,.$$

Allgemein erhalten wir:

$$dq^{-n} = - q^{-1} dq \,.\, q^{-n} - q^{-2} dq \,.\, q^{-n+1} \ldots - q^{-n} dq \,.\, q^{-1},$$

wenn n eine ganze Zahl ist.

Wir hatten

$$dSq = Sdq \quad \text{und} \quad dVq = Vdq \,.$$

Da aber

$$Kq = Sq - Vq$$

ist, so haben wir:

$$dKq = d(Sq - Vq) = dSq - dVq = Sdq - Vdq = Kdq \,.$$

Es ist

$$(Tq)^2 = qKq,$$

also:

$$2(Tq)\, dTq = dq \,.\, Kq + q \,.\, dKq = q \,.\, Kdq + K(q\,Kdq)$$
$$= 2S(q\,Kdq) = 2S(Kq \,.\, dq) \,.$$

Daher haben wir:

$$dTq = \frac{S(Kq \,.\, dq)}{Tq}$$

und

$$\frac{dTq}{Tq} = S\,\frac{Kq \,.\, dq}{(Tq)^2} \,.$$

Ist hier q ein Vektor ϱ, so ist:

$$(T\varrho)^2 = -\varrho^2$$

und

$$2\,T\varrho\, dT\varrho = -(\varrho\,.\,d\varrho + d\varrho\,.\,\varrho).$$

Da aber:

$$\beta\alpha = ba(-\cos\varphi - i\sin\varphi) = S\beta\alpha + V\beta\alpha$$

$$\alpha\beta = ba(-\cos\varphi + i\sin\varphi) = S\beta\alpha - V\beta\alpha$$

so ist:

$$\beta\alpha + \alpha\beta = 2\,ba(-\cos\varphi) = 2\,S\alpha\beta.$$

Mithin ist

$$T\varrho\,.\,dT\varrho = S\varrho\,.\,d\varrho.$$

Aus:

$$\varrho = T\varrho\,.\,U\varrho$$

folgt:

$$d\varrho = dT\varrho\,.\,U\varrho + T\varrho\,.\,dU\varrho,$$

mithin, da $T\varrho$ eine reelle Zahl ist:

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = dT\varrho\,.\,\frac{U\varrho}{\varrho} + T\varrho\,.\,\frac{dU\varrho}{\varrho}$$

$$= \frac{dT\varrho}{T\varrho} + \frac{dU\varrho}{U\varrho}.$$

Nehmen wir hier den Vektor, so ist:

$$V\frac{d\varrho}{\varrho} = V\frac{dU\varrho}{U\varrho}.$$

Aufser diesen Differentialen brauchen wir im folgenden die zweiten und dritten Differentiale, welche durch die Gleichungen:

$$d(dp) = d^2p, \quad d(d^2p) = d^3p$$

definiert sind.

So haben wir z. B.

$$d^2(q^2) = d(dq\,.\,q + q\,.\,dq) = d^2q\,.\,q + 2\,dq\,.\,dq + q\,.\,d^2q$$

und

$$d^3(q^2) = d^3q\,.\,q + 3d^2q\,.\,dq + 2dq\,.\,d^2q + q\,.\,d^3q.$$

In allen diesen Formeln ist dq eine beliebige Zunahme von q, welche nicht, wie in der Differentialrechnung mit reellen Zahlen, unendlich klein zu sein braucht.

Die Gröfse dp ist eine Funktion von q und dq; wir können setzen:

$$dp = \lim_{h=0} \frac{F(q + h dq) - F(q)}{h} = f(q, dq).$$

Nehmen wir statt der Zunahme dq eine andere Zunahme dq_1, so ist

$$dp = \lim_{h=0} \frac{F(q + h dq_1) - F(q)}{h} = f(q, dq_1).$$

Es ist aber:

$$f(q, dq + dq_1) = \lim_{h=0} \frac{F(q + h dq + h dq_1) - F(q)}{h}$$

$$= \lim_{h=0} \frac{F(q + h dq + h dq_1) - F(q + h dq_1) + F(q + h dq_1) - F(q)}{h}$$

$$= f(q, dq) + f(q, dq_1).$$

Aus dieser Formel folgt sofort:

$$f(q, x dq) = f(q, dq + dq + dq \ldots) = x f(q, dq).$$

Siebente Vorlesung.

Operationen mit den Symbolen S und V.

Es seien zwei Vektoren:

$$\alpha = a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3$$
$$\beta = b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3$$

gegeben. α und β sind Quaternionen, deren Skalaren Null sind. Der zu α konjugierte Vektor ist:

$$K\alpha = -\alpha$$

und der zu β konjugierte Vektor ist

$$K\beta = -\beta.$$

Da α und β Vertreter von Elementarquaternionen sind, so ist

$$K\alpha \, . \, K\beta = K\beta\alpha = \alpha \, . \, \beta$$

und

$$K\beta \, . \, K\alpha = K\alpha\beta = \beta \, . \, \alpha.$$

Es ist aber

$$\alpha \, . \, \beta = S\alpha\beta + V\alpha\beta, \quad \beta \, . \, \alpha = K\alpha\beta = S\alpha\beta - V\alpha\beta.$$

$$K\beta\alpha = S\beta\alpha - V\beta\alpha,$$

also

$$\alpha\,.\,\beta - K\beta\alpha = S\alpha\beta - S\beta\alpha + V\alpha\beta + V\beta\alpha = 0,$$

aus welcher Gleichung folgt:

$$S\alpha\beta = S\beta\alpha, \quad V\alpha\beta = -V\beta\alpha.$$

Diese Gleichungen folgen auch durch Subtraktion und Addition der beiden Gleichungen:

$$\alpha\,.\,\beta = S\alpha\beta + V\alpha\beta$$
$$\beta\,.\,\alpha = S\alpha\beta - V\alpha\beta = K\alpha\beta.$$

Es folgt hieraus

$$\alpha\,.\,\beta + \beta\,.\,\alpha = 2\,S\alpha\beta, \quad \alpha\,.\,\beta - \beta\,.\,\alpha = 2\,V\alpha\beta.$$

Vertauschen wir hier α und β, so erhalten wir die zwei obigen Gleichungen.

Wir haben auch:

$$K(\alpha\beta\,.\,\gamma) = K\gamma\,.\,K\alpha\beta = K\gamma\,.\,K\beta\,.\,K\alpha = -\gamma\beta\alpha.$$

Es ist aber

$$\alpha\,.\,\beta\,.\,\gamma = S\alpha\beta\gamma + V\alpha\beta\gamma$$
$$-K\alpha\beta\gamma = +\gamma\beta\alpha = -S\alpha\beta\gamma + V\alpha\beta\gamma$$

und durch Subtraktion:

$$\alpha\,.\,\beta\,.\,\gamma - \gamma\,.\,\beta\,.\,\alpha = 2\,S\alpha\beta\gamma.$$

Vertauschen wir hier γ mit α, so erhalten wir:

$$\gamma\,.\,\beta\,.\,\alpha - \alpha\,.\,\beta\,.\,\gamma = 2\,S\gamma\beta\alpha,$$

mithin:

$$S\alpha\beta\gamma = -S\gamma\beta\alpha.$$

Wir können auch schreiben:

$$S\alpha\beta\gamma = S\alpha(\beta\gamma) = S\{\alpha\,V\beta\gamma\} + S\{\alpha(S\beta\gamma)\}.$$

Da aber $S\beta\gamma$ eine reelle Zahl ist, so ist

$$S\{\alpha(S\beta\gamma)\} = S\beta\gamma\,.\,S\alpha = 0,$$

denn der Skalar eines Vektoren ist Null.

Mithin ist

$$S\alpha\beta\gamma = S\{\alpha\,V\beta\gamma\} = -S\{\alpha\,V\gamma\beta\} = -S\alpha\gamma\beta.$$

Ebenso ist:

$$S\alpha\gamma\beta = S\{V\alpha\gamma\,.\,\beta\} = -S\gamma\alpha\beta$$
$$= S\{\beta\,.\,V\alpha\gamma\} = -S\beta\gamma\alpha$$
$$S\alpha\beta\gamma = S\{V\alpha\beta\,.\,\gamma\} = -S\beta\alpha\gamma\,.$$

Wir haben also die Gleichungen:

$$S\alpha\beta\gamma = S\beta\gamma\alpha = S\gamma\alpha\beta = -S\alpha\gamma\beta = -S\beta\alpha\gamma = -S\gamma\beta\alpha\,.$$

Multiplizieren wir wirklich die Vektoren nach den gewöhnlichen Regeln, so erhalten wir, wenn

$$\gamma = c_1 i_1 + c_2 i_2 + c_3 i_3,$$
$$\alpha\,.\,\beta = -(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + (a_2 b_3 - a_3 b_2) i_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) i_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) i_3,$$

ist,

$$\alpha\,.\,\beta\,.\,\gamma = -\begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1\ c_2\ c_3 \end{vmatrix} + V\alpha\beta\gamma\,.$$

Es ist mithin:

$$S\alpha\beta\gamma = -\begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1\ c_2\ c_3 \end{vmatrix}.$$

Vertauschen wir hier in der Determinante je zwei Horizontal- oder Vertikalreihen, so erhalten wir die Relationen für $S\alpha\beta\gamma$. Werden in der Determinante die a gleich den b, so verschwindet die Determinante und es ist

$$S\alpha\,.\,\alpha\,.\,\gamma = S\alpha^2\,.\,\gamma = 0\,,$$

wie natürlich, da α^2 ein Skalar ist.

Machen wir in der Determinante $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$, so ist ihr Wert ebenfalls Null, und es ist daher

$$S\alpha\beta\gamma = 0\,,$$

wenn

$$\alpha = a_1 i_1 + a_1 i_2 + a_3 i_3$$
$$\beta = b_1 i_1 + b_1 i_2 + b_3 i_3$$
$$\gamma = c_1 i_1 + c_1 i_2 + c_3 i_3\,.$$

Allgemein ist $S\alpha\beta\gamma = 0$, wenn zwischen den Koefficienten der i die drei Gleichungen:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = 0$$

bestehen. Dann ist:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0 .$$

Ist $S\alpha\beta\gamma = 0$, so liegen α, β, γ in einer Ebene, und liegen $\alpha\beta\gamma$ in einer Ebene, so ist $S\alpha\beta\gamma = 0$.

Liegen $\alpha\beta\gamma$ in einer Ebene, so steht der Vektor $V\alpha\beta$ senkrecht auf dieser Ebene, mithin auch auf γ; da aber das Produkt zweier senkrechter Vektoren wieder ein Vektor ist, so ist der Skalarteil Null; also $S\{V\alpha\beta . \gamma\} = S\alpha\beta\gamma = 0$.

Ist $S\alpha\beta\gamma = 0$, so ist auch $S\{V\alpha\beta . \gamma\} = 0$. Der Skalarteil des Produktes der Vektoren $V\alpha\beta . \gamma$ ist also Null, es stehen mithin diese Vektoren senkrecht aufeinander. Da aber $V\alpha\beta$ auf α und β senkrecht steht, so mufs γ in die Ebene der Vektoren α und β fallen.

Wir können drei Gröfsen x, y, z so bestimmen, dafs ist

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta = i_1 d_1 + i_2 d_2 + i_3 d_3 .$$

Es ist dann:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 .$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Aus dieser Determinante ergiebt sich:

$$\delta S\alpha\beta\gamma = \alpha S\gamma\delta\beta + \beta S\alpha\delta\gamma + \gamma S\beta\delta\alpha .$$

Wir können auch $V\alpha\beta$ in Determinantenform schreiben:

$$\begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = V\alpha\beta .$$

Hieraus folgt sofort:

$$2\,V\alpha\beta = -2\,V\beta\alpha = \alpha\beta - \beta\alpha.$$

Da β ein Vektor ist, so können wir setzen $\beta = V\beta_1\gamma$, und wenn wir statt β_1 wieder β schreiben:

$$2\,V(\alpha\,V\beta\gamma) = \alpha\,.\,V\beta\gamma - V\beta\gamma\,.\,\alpha.$$

Addieren wir zu dieser Gleichung die identische Gleichung:

$$0 = \alpha\,.\,S\beta\gamma - S\beta\gamma\,.\,\alpha,$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} 2\,V(\alpha\,.\,V\beta\gamma) &= \alpha\beta\gamma - \beta\gamma\alpha \\ &= (\alpha\beta + \beta\alpha)\gamma - \beta(\gamma\alpha + \alpha\gamma) \\ &= 2\,\gamma\,.\,S\alpha\beta - 2\,\beta\,.\,S\gamma\alpha. \end{aligned}$$

Es ist also:

$$V(\alpha\,V\beta\gamma) = \gamma\,.\,S\alpha\beta - \beta\,.\,S\gamma\alpha.$$

Wenn wir zu dieser Gleichung die identische Gleichung:

$$V(\alpha\,S\beta\gamma) = \alpha\,S\beta\gamma$$

addieren, so bekommen wir die wichtige Gleichung:

$$V\alpha\beta\gamma = \alpha S\beta\gamma - \beta S\gamma\alpha + \gamma S\alpha\beta = V\gamma\beta\alpha.$$

Vertauschen wir hier β und γ, so ist:

$$V\alpha\gamma\beta = \alpha S\beta\gamma + \beta S\gamma\alpha - \gamma S\alpha\beta.$$

Aus der Gleichung:

$$V(\alpha\,V\beta\gamma) = \gamma S\alpha\beta - \beta S\gamma\alpha$$

folgt:

$$\begin{aligned} V(\beta\,V\gamma\alpha) &= \alpha S\beta\gamma - \gamma S\alpha\beta \\ V(\gamma\,V\alpha\beta) &= \beta S\gamma\alpha - \alpha S\beta\gamma. \end{aligned}$$

Und durch Addition dieser Werte erhalten wir:

$$V\{\alpha\,V(\beta\gamma)\} + V\{\beta\,V\gamma\alpha\} + V\{\gamma\,V\alpha\beta\} = 0.$$

Addieren wir zu dieser Gleichung die selbstverständliche Gleichung:

$$S(\alpha\,V\beta\gamma) + S(\beta\,V\gamma\alpha) + S(\gamma\,V\alpha\beta) = 3\,S\alpha\beta\gamma,$$

so finden wir:

$$\alpha\,V\beta\gamma + \beta\,V\gamma\alpha + \gamma\,V\alpha\beta = 3\,S\alpha\beta\gamma.$$

Führen wir Determinanten ein, so lautet diese Gleichung:

$$\alpha\begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \beta\begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} + \gamma\begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Wie oben haben wir auch:

$$V(V\alpha\beta \,.\, V\gamma\delta) = \delta\, S(\gamma\, V\alpha\beta) - \gamma\, S(V\alpha\beta)\delta$$

und da

$$S\gamma\, V\alpha\beta = S\gamma\alpha\beta$$

ist:

$$V(V\alpha\beta \,.\, V\gamma\delta) = \delta S\gamma\alpha\beta - \gamma S\alpha\beta\delta \,.$$

Hieraus folgt sofort:

$$V(V\gamma\delta \,.\, V\beta\alpha) = \alpha S\gamma\delta\beta - \beta S\gamma\delta\alpha \,.$$

Da aber

$$- V\beta\alpha = V\alpha\beta$$

ist, so ist

$$V(V\alpha\beta \,.\, V\gamma\delta) = - V(V\beta\alpha \,.\, V\gamma\delta) = + V(V\gamma\delta \,.\, V\beta\alpha)$$

und schliefslich:

$$\delta S\alpha\beta\gamma - \alpha S\beta\gamma\delta + \beta S\gamma\delta\alpha - \gamma S\alpha\beta\delta = 0 \,.$$

Diese wichtige Formel haben wir schon mit Hülfe der Determinante für $S\alpha\beta\gamma$ abgeleitet.

Haben wir vier Vektoren α, β, γ, δ, so ist:

$$S\alpha\beta\gamma\delta = S(\alpha\, V\beta\gamma\delta),$$

da

$$S(\alpha S\beta\gamma\delta) = 0 \,.$$

Es ist aber

$$V\beta\gamma\delta = \beta S\gamma\delta - \gamma S\beta\delta + \delta S\beta\gamma \,,$$

also:

$$S\alpha\beta\gamma\delta = S\alpha\beta \,.\, S\gamma\delta - S\alpha\gamma \,.\, S\delta\beta + S\alpha\delta \,.\, S\beta\gamma \,.$$

Hieraus folgt:

$$S\beta\gamma\delta\alpha = S\beta\gamma \,.\, S\delta\alpha - S\beta\delta \,.\, S\alpha\gamma + S\alpha\beta \,.\, S\gamma\delta \,,$$

also:

$$S\alpha\beta\gamma\delta = S\beta\gamma\delta\alpha = S\gamma\delta\alpha\beta = S\delta\alpha\beta\gamma \,.$$

Es ist ferner

$$S\alpha\beta\delta\gamma = S\alpha\beta \,.\, S\delta\gamma - S\alpha\beta \,.\, S\gamma\beta + S\alpha\gamma \,.\, S\beta\delta \,.$$

Da die Gleichung

$$\alpha\beta \,.\, \gamma\delta = (S\alpha\beta + V\alpha\beta)\,(S\gamma\delta + V\gamma\delta)$$

besteht, so ist auch

$$S\alpha\beta\gamma\delta = S\alpha\beta \,.\, S\gamma\delta + S(V\alpha\beta \,.\, V\gamma\delta) \,,$$

mithin:

$$S(V\alpha\beta \,.\, V\gamma\delta) = S\alpha\delta \,.\, S\beta\gamma - S\alpha\gamma \,.\, S\beta\delta\,.$$

Es ist aber:

$$V(V\alpha\beta \,.\, V\gamma\delta) = \delta S\alpha\beta\gamma - \gamma S\alpha\beta\delta,$$

mithin

$$V\alpha\beta \,.\, V\gamma\delta = S\alpha\delta \,.\, S\beta\gamma - S\alpha\gamma \,.\, S\beta\delta + \delta S\alpha\beta\gamma + \gamma S\alpha\delta\beta\,.$$

Mit Hülfe dieser Relationen wollen wir einige Gleichungen entwickeln, welche in der Folge oft auftreten werden.

Es seien α, β, γ drei Vektoren, welche den Gleichungen:

$$S\alpha\beta = 0$$

$$S\alpha\gamma = m$$

$$S\alpha\beta\gamma = 0$$

genügen; es soll eine Gleichung aufgestellt werden, welche diese Bedingungen erfüllt.

Aus der letzten der drei Gleichungen folgt:

$$\alpha\beta\gamma = V\alpha\beta\gamma,$$

also auch

$$\alpha\gamma\beta = V\alpha\gamma\beta$$

$$= \alpha S\gamma\beta - \gamma S\alpha\beta + \beta S\alpha\gamma\,.$$

Da aber:

$$S\alpha\beta = 0, \quad S\alpha\gamma = m,$$

so ist:

$$\alpha\gamma\beta = \alpha S\gamma\beta + \beta m\,.$$

Es ist aber auch:

$$\alpha\gamma\beta = \alpha \,.\, S\gamma\beta + \alpha \,.\, V\gamma\beta,$$

mithin:

$$\alpha \,.\, V\gamma\beta = \beta m\,.$$

Dies ist die gesuchte Gleichung. Denn offenbar erfüllt sie die dritte Gleichung. Multiplizieren wir sie mit β, so erhalten wir:

$$\alpha \,.\, V\gamma\beta \,.\, \beta = \beta^2 m$$

und nehmen beiderseits den Skalarteil, so ist:

$$S\alpha \,.\, V\gamma\beta \,.\, \beta = \beta^2 \,.\, m$$

oder

$$S\beta \,.\, \alpha \,.\, V\gamma\beta = SV\beta\alpha \,.\, V\gamma\beta = \beta^2 S\alpha\gamma - S\beta\gamma \,.\, S\alpha\gamma = \beta^2 m\,.$$

Aus der Gleichung folgt aber auch,

$$\alpha^2 . V\gamma\beta = \alpha\beta . m$$

und hieraus, weil α^2 ein Skalar ist:

$$\alpha^2 S V\gamma\beta = 0 = S\alpha\beta . m .$$

Mithin folgt aus der Gleichung mit β^2 die Bedingungsgleichung:

$$S\alpha\gamma = m .$$

Auf ähnliche Art wollen wir aus den drei Gleichungen:

$$\alpha V\beta\gamma = \gamma . m, \quad S V\beta\gamma . V\delta\varepsilon = 0, \quad S\delta\varepsilon\gamma = 0$$

eine Gleichung ableiten.

Aus der zweiten dieser Gleichungen folgt:

$$V\delta\varepsilon . V\gamma\beta = - V\gamma\beta . V\delta\varepsilon$$

$$V(V\delta\varepsilon . V\gamma\beta) = V\delta\varepsilon . V\gamma\beta .$$

Es ist aber:

$$V(V\delta\varepsilon . V\gamma\beta) = - \gamma S\delta\varepsilon\beta + \beta S\delta\varepsilon\gamma ,$$

mithin:

$$V\gamma\beta . V\delta\varepsilon = \gamma . S\delta\varepsilon\beta ,$$

also:

$$(\alpha . V\gamma\beta) V\delta\varepsilon = \alpha\gamma . S\delta\varepsilon\beta$$

oder

$$- \gamma m . V\delta\varepsilon = \alpha\gamma . S\delta\varepsilon\beta .$$

Da aber $S\gamma\delta\varepsilon = 0$ ist, so ist

$$\gamma V\delta\varepsilon = - V\delta\varepsilon . \gamma ,$$

also

$$m . V\delta\varepsilon . \gamma = \alpha . \gamma . S\delta\varepsilon\beta .$$

Multiplizieren wir auf beiden Seiten mit $K\gamma$, so erhalten wir schliefslich:

$$m . V\delta\varepsilon = \alpha . S\delta\varepsilon\beta .$$

Mit Hülfe der Relationen in S und V können wir auch Vektorengleichungen auflösen.

Es sei z. B. die Gleichung

$$V\alpha\varrho\beta = \gamma$$

für den unbekannten Vektor ϱ aufzulösen. Aus der Gleichung folgt:

$$\alpha V\alpha\varrho\beta = \alpha\gamma ,$$

mithin:

$$S\alpha V\alpha\varrho\beta = S\alpha\gamma$$

oder

$$S\alpha^2\varrho\beta = \alpha^2 S\varrho\beta = S\alpha\gamma.$$

Ebenso haben wir

$$S\beta V\alpha\varrho\beta = S\beta\alpha\varrho\beta = S\beta^2\alpha\varrho = \beta^2 S\alpha\varrho = S\beta\gamma.$$

Nun haben wir

$$V\alpha\varrho\beta = \alpha S\beta\varrho - \varrho S\alpha\beta + \beta S\alpha\varrho = \gamma,$$

also

$$\varrho S\alpha\beta = \alpha S\beta\varrho + \beta S\alpha\varrho - \gamma,$$

daher ist ϱ bestimmt durch die Gleichung:

$$\varrho S\alpha\beta = \alpha S\alpha\gamma\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) + \beta S\beta\gamma\left(\frac{1}{\beta^2}\right) - \gamma.$$

Es sei als zweites Beispiel gegeben:

$$V\alpha\beta\varrho = \gamma.$$

Dies können wir auch schreiben:

$$\gamma = V\alpha\beta\gamma = V(S\alpha\beta + V\alpha\beta)\varrho = \varrho S\alpha\beta + V(V\alpha\beta)\varrho.$$

Aus dieser Gleichung folgt aber

$$\begin{aligned} S(V\alpha\beta)\gamma = S\alpha\beta\varrho &= S[V\alpha\beta \,.\, \varrho S\alpha\beta + V\alpha\beta \,.\, V(V\alpha\beta)\varrho] \\ &= S\alpha\beta \,.\, S\alpha\beta\varrho + S(V\alpha\beta \,.\, V\alpha\beta\varrho) \\ &= S\alpha\beta \,.\, S\alpha\beta\varrho, \end{aligned}$$

mithin auch

$$S\alpha\beta\varrho = \frac{S\alpha\beta\gamma}{S\alpha\beta}.$$

Da aber

$$V\alpha\beta\varrho = \gamma,$$

so ist

$$\alpha\beta\varrho = \gamma + \frac{S\alpha\beta\gamma}{S\alpha\beta}$$

und

$$\varrho = K\alpha\beta\left(\gamma + \frac{S\alpha\beta\gamma}{S\alpha\beta}\right) : [F(\alpha\beta)]^2.$$

Um die Gleichung

$$\alpha' S\beta'\varrho + \alpha'' S\beta''\varrho + \alpha''' S\beta'''\varrho = \gamma$$

aufzulösen, multiplizieren wir sie der Reihe nach mit $\alpha''\alpha'''$, $\alpha'''\alpha'$, $\alpha'\alpha''$ und nehmen den Skalarteil; wir erhalten so

$$S\alpha''\alpha'''\alpha' S\beta'\varrho = S\alpha''\alpha'''\gamma$$
$$S\alpha'''\alpha'\alpha'' S\beta''\varrho = S\alpha'''\alpha'\gamma$$
$$S\alpha'\alpha''\alpha''' S\beta'''\varrho = S\alpha'\alpha''\gamma .$$

Wir setzen

$$\delta = x V\alpha\beta + y V\beta\gamma + z V\gamma\alpha .$$

Dann ist:

$$\gamma\delta = \gamma x V\alpha\beta + \gamma y V\beta\gamma + \gamma z V\gamma\alpha ,$$

mithin

$$S\gamma\delta = x S\gamma\alpha\beta = x S\alpha\beta\gamma ,$$

weil $S\varepsilon V\zeta\varepsilon = S\varepsilon\zeta\varepsilon = 0$.

Ferner erhalten wir

$$S\delta\beta = z S\alpha\beta\gamma$$

und

$$S\delta\alpha = y S\alpha\beta\gamma .$$

Mithin

$$\delta = S\alpha\beta\gamma = V\alpha\beta \,.\, S\gamma\delta + V\beta\gamma \,.\, S\alpha\delta + V\gamma\alpha \,.\, S\beta\delta .$$

Wir haben also zur Bestimmung vou ϱ die Gleichung:

$$\varrho S\alpha'\alpha''\alpha''' . S\beta'\beta''\beta''' = V\beta'\beta'' . S\alpha'\alpha''\gamma + V\beta''\beta''' . S\alpha''\alpha'''\gamma$$
$$+ V\beta'''\beta' . S\alpha'''\alpha'\gamma .$$

Mit Hülfe der Operationen in S und V können wir sehr einfach die Formeln der linearen Koordinaten-Transformation ableiten. Es seien OA, OB, OC die Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Auf OA liege die Einheitsstrecke i_1, auf OB sei die Einheitsstrecke i_2 und auf OC die Einheitsstrecke i_3. Ebenso seien OA', OB', OC' mit den entsprechenden Einheitsstrecken i_1', i_2', i_3' die Achsen eines zweiten rechtwinkligen Koordinatensystems.

Ziehen wir durch O eine Strecke OM, so können wir setzen:

$$OM = i_1 x + i_2 y + i_3 z$$
$$OM = i_1' X + i_2' Y + i_3' Z .$$

Da TOM die Länge von OM angiebt, so ist:

$$x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 .$$

Die Strecken OA', OB', OC' können wir nach den Achsen i_1, i_2, i_3 zerlegen. Wir können daher setzen:

$$i_1' = i_1 a + i_2 b + i_3 c$$
$$i_2' = i_1 a' + i_2 b' + i_3 c'$$
$$i_3' = i_1 a'' + i_2 b'' + i_3 c''.$$

Setzen wir diese Werte oben ein, so erhalten wir:

$$x = aX + a'Y + a''Z$$
$$y = bX + b'Y + b''Z$$
$$z = cX + c'Y + c''Z.$$

Wir haben ferner:

$$SOM . i_1' = -X, \quad SOM . i_2' = -Y, \quad SOM . i_3' = -Z.$$

Bilden wir uns aber diese Skalaren mit Hülfe der Formeln, in welchen i_1, i_2, i_3 vorkommen, so erhalten wir leicht:

$$X = ax + by + cz$$
$$Y = a'x + b'y + c'z$$
$$Z = a''x + b''y + c''z.$$

Ferner ist:

$$i_1'^2 = -1, \quad i_2'^2 = -1, \quad i_3'^2 = -1, \quad i_1' . i_2' = i_3'$$

$Si_1' . i_2' = 0$, $Si_2' . i_3' = 0$, $Si_1' . i_3' = 0$ und $Si_1' \cdot i_2' . i_3' = -1$, mithin:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \qquad aa' + bb' + cc' = 0$$
$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, \qquad aa'' + bb'' + cc'' = 0$$
$$a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1, \qquad a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0$$

$$ab' - a'b = c'', \quad c'a'' - c''a' = b, \quad b'c'' - b''c' = a$$
$$a''b - ab'' = c', \quad c''a - ca'' = b', \quad b''c - bc'' = a'$$
$$a'b'' - a''b' = c, \quad ca' - c'a = b'', \quad bc' - b'c = a''.$$

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 1.$$

Diese Determinante wird -1, wenn wir annehmen

$$i_1' . i_2' = -i_3'.$$

Setzen wir die Werte von X, Y, Z in $OM = i_1'X + i_2'Y + i_3'Z$ ein, und vergleichen die so erhaltene Gleichung mit $OM = i_1 x + i_2 y + i_3 z$, so finden wir:

$$i_1 = a i_1' + a' i_2' + a'' i_3',$$
$$i_2 = b i_1' + b' i_2' + b'' i_3',$$
$$i_3 = c i_1' + c' i_2' + c'' i_3'.$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir die weiteren Formeln:

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \quad ab + a'b' + a''b'' = 0,$$
$$b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \quad ac + a'c' + a''c'' = 0,$$
$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, \quad bc + b'c' + b''c'' = 0.$$

Schliefslich seien noch folgende Formeln erwähnt:

$$bx - ay = c'Z - c''Y,$$
$$b'x - a'y = c''X - cZ,$$
$$b''x - a''y = cY - c'X,$$
$$az - cx = b'Z - b''Y,$$
$$a'z - c'x = b''X - bZ,$$
$$a''z - c''x = bY - b'X,$$
$$cy - bz = a'Z - a''Y,$$
$$c'y - b'z = a''X - aZ,$$
$$c''y - b''z = aY - a'X.$$

Achte Vorlesung.

Anwendung der Quaternionen auf die Theorie der Kurven im Raume. Tangente und Normalebene, Schmiegungsebene und Oskulationskreis.

Die einfachste Kurve im Raume ist die Gerade oder wie wir von nun an sagen der Vektor. Alle Vektoren im Raume können wir bestimmen durch Vektoren, welche durch ein und denselben Punkt — den Vektorenanfang — gehen. Wir bezeichnen die unbegrenzten Vektoren durch den Ursprung mit ϱ. Ist α ein gegebener Vektor, so ist

$$\varrho = x \,.\, \alpha$$

die Gleichung einer Geraden parallel zu α. Aus dieser Gleichung folgt

$$V\varrho\alpha = 0.$$

Ist umgekehrt diese Gleichung gegeben, so ist ϱ eine

Gerade parallel der Geraden α, da die Gleichung anzeigt, dafs der Winkel zwischen ϱ und α Null Grad beträgt.

Ziehen wir einen Vektor β durch den Anfangspunkt und durch den Endpunkt von β eine Gerade parallel α, so ist die Gleichung dieser letzten Geraden:

$$\varrho = \beta + x\alpha$$

oder

$$V(\varrho - \beta)\alpha = 0.$$

Die Gleichungen von zwei parallelen Geraden durch die Endpunkte von β_1 und β_2 sind daher:

$$V(\varrho - \beta_1)\alpha = 0, \quad V(\varrho - \beta_2)\alpha = 0.$$

Ziehen wir aber durch den Endpunkt von β eine Gerade senkrecht auf α, so ist deren Gleichung:

$$\varrho = \beta + x\alpha \,.\, V\alpha\beta.$$

Die vom Endpunkt von β auf α gefällte Gerade sei γ, dann ist

$$\varrho = \beta + x\gamma.$$

Es ist aber $V\alpha\beta$ eine Gerade senkrecht auf α und β, mithin auch senkrecht auf γ; $V(\alpha \,.\, V\alpha\beta)$ ist aber senkrecht auf α und senkrecht auf $V\alpha\beta$, dieser Vektor fällt also mit γ zusammen und wir können setzen:

$$\gamma = V(\alpha\, V\alpha\beta) = \alpha\, V\alpha\beta,$$

weil $S(\alpha\, V\alpha\beta) = \alpha^2 S\beta = 0$. Die Gleichung können wir auch schreiben

$$S(\varrho - \beta)\alpha = 0.$$

Geht α durch den Endpunkt von β, so liegen die Endpunkte von ϱ in einer Ebene, welche senkrecht auf α steht. Die letzte Gleichung ist die Gleichung einer Ebene, welche durch den Endpunkt von β geht und auf α senkrecht steht. Wird $\beta = 0$, so ist

$$S\varrho\alpha = 0$$

die Gleichung einer Ebene, welche durch den Vektorenanfang geht und auf α senkrecht ist.

Liegen in der Ebene, welche durch den Endpunkt von β geht und senkrecht auf α ist, zwei Vektoren β_1, β_2, so haben wir bekanntlich, wenn x eine reelle Zahl ist:

$$\alpha = x V \beta_1 \beta_2$$

und die Gleichung der Ebene ist:

$$S(\varrho - \beta) x V \beta_1 \beta_2 = 0$$

oder

$$S(\varrho - \beta) \beta_1 \beta_2 = 0.$$

Die Geraden β_1, β_2 laufen aber parallel den Geraden

$$\varrho_1 = \alpha_1 + x\beta_1, \quad \varrho_2 = \alpha_2 + x\beta_2.$$

Die letzte Gleichung stellt also eine Ebene dar, welche durch den Endpunkt von β geht und den Geraden ϱ_1, ϱ_2 parallel ist.

In dieser Gleichung können wir β_1 zerlegen, indem wir setzen:

$$\beta_1 = \beta - \gamma$$

und die Gleichung der Ebene lautet:

$$S(\varrho - \beta)(\beta - \gamma)\beta_2 = 0.$$

Diese Gleichung repräsentiert eine Ebene, welche durch die Endpunkte von β und γ geht und senkrecht zur Ebene $S\varrho\beta_2 = 0$ ist, da diese Ebene senkrecht auf β_2 steht.

Wie wir β_1 zerlegt haben, so können wir auch β_2 durch die Summe zweier anderen Strecken darstellen. Wir setzen nämlich

$$\beta_2 = \gamma - \delta,$$

und erhalten als Gleichung der Ebene

$$S(\varrho - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \delta) = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer Ebene, welche durch die Endpunkte von β, γ, δ geht.

Wir wollen die Länge des Perpendikels vom Ursprung der Vektoren nach der Ebene

$$S(\varrho - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \delta) = 0$$

bestimmen.

Die Gleichung der Ebene können wir schreiben:

$$S\varrho(V\beta\gamma + V\gamma\delta + V\delta\beta) - S\beta\gamma\delta = 0.$$

Die Gleichung einer Ebene durch den Endpunkt von α und senkrecht zu ε ist:

$$S(\varrho - \alpha)\varepsilon = 0,$$

oder

$$S\varrho\varepsilon - S\alpha\varepsilon = 0.$$

Setzen wir hier

$$\alpha = \beta$$

und

$$\varepsilon = x(V\beta\gamma + V\gamma\delta + V\delta\beta),$$

so erhalten wir die Gleichung der betrachteten Ebene. Der Vektor ε fällt also in die Richtung der Senkrechten auf die Ebene. Setzen wir in die Gleichung der Ebene $\varrho = \varepsilon$, so ist ε die Senkrechte auf die Ebene vom Ursprunge aus, und wir erhalten zur Bestimmung von x die Gleichung:

$$Sx(V\beta\gamma + V\gamma\delta + V\delta\beta)^2 = S\beta\gamma\delta,$$

und hieraus:

$$x = \frac{S\beta\gamma\delta}{(V\beta\gamma + V\gamma\delta + V\delta\beta)^2},$$

also

$$\varepsilon = \frac{S\beta\gamma\delta}{V\beta\gamma + V\gamma\delta + V\delta\beta}.$$

Es sind $\beta\gamma\delta$ drei an einer Ecke liegende Kanten eines Tetraeders. Es ist

$$S\beta\gamma\delta = S(V\beta\gamma)\delta.$$

Wir können auch setzen:

$$V\beta\gamma = T\beta \,.\, T\gamma \,.\, \sin\beta\gamma \,.\, \eta,$$

wenn η ein zu $\beta\gamma$ senkrechter Einheitsvektor ist.

Wir haben daher

$$\begin{aligned} S\beta\gamma\delta &= T\beta \,.\, T\gamma \,.\, \sin\beta\gamma \,.\, S\eta\delta \\ &= - T\beta \,.\, T\gamma \,.\, T\delta \,.\, \sin(\beta\gamma) \,.\, \cos(\eta\delta) \\ &= - b \,.\, c \,.\, d \,.\, \sin(bc) \,.\, \cos(\eta\delta), \end{aligned}$$

wenn b, c, d die resp. Längen von β, γ, δ sind. Es ist aber $b \,.\, c \,.\, \sin(bc)$ der doppelte Inhalt des Dreiecks mit den Seiten β und γ, und $d \,.\, \cos\eta\delta$ gleich d mal dem Sinus des Neigungswinkels der Kante d gegen die Ebene ab, mithin ist $b \,.\, c \,.\, d \,.\, \sin(bc)\cos(\eta\delta)$ gleich dem sechsfachen Volumen des Tetraeders mit den Kanten bcd und wir können setzen

$$- S\beta\gamma\delta = 6\,\mathrm{Vol}\,(bcd).$$

Fallen β, γ, δ in eine Ebene, so ist das Volumen gleich Null und wir haben die schon bewiesene Relation:

$$S\beta\gamma\delta = 0.$$

Wir erhalten somit, wenn B, C, D die Endpunkte von β, γ, δ sind:

$$\varepsilon = -\frac{6 \operatorname{Vol} bcd}{V\beta\gamma + V\gamma\delta + V\delta\beta}.$$

Es ist aber

$$6 \operatorname{Vol} bcd = 2\,\varepsilon \triangle BCD,$$

mithin

$$V\beta\gamma + V\gamma\delta + V\delta\beta = -2 \triangle BCD.$$

Fällt β mit γ zusammen, so erhalten wir wieder

$$V\beta\delta + V\delta\beta = 0.$$

Im Raume sei eine Curve durch ihre Gleichung

$$\varrho = f(t)$$

gegeben. Wir betrachten die beiden Punkte der Curve, denen die Vektoren ϱ und $\varrho + \varDelta\varrho$ zugehören und zwar so, dafs ist

$$OM = \varrho, \quad OM' = \varrho + \varDelta\varrho.$$

Wenn ϱ um $\varDelta\varrho$ zunimmt, so soll t sich um $\varDelta t$ ändern; es ist mithin

$$OM' = f(t + \varDelta t).$$

Je näher M' an den Punkt M rückt, um so mehr nähert sich $\varrho + \varDelta\varrho$ dem Werte von ϱ, d. h. um so kleiner wird $\varDelta\varrho$, also auch $\varDelta t$.

Rückt M' unendlich nahe an M, so wird MM' zum „Bogenelement", und die unbegrenzte Gerade MM' wird zur Tangente, da „die Tangente eine Gerade ist, welche durch zwei unendlich nahe Punkte der Curve geht". Ist $\varDelta\varrho$ unendlich klein, so hat die Tangente die Richtung von MM'. Es ist aber

$$MM' = OM' - OM = \varDelta\varrho;$$

bezeichnen wir das unendlich kleine $\varDelta\varrho$ mit $d\varrho$ und ebenso das unendlich kleine $\varDelta t$ mit dt, so ist die Tangente parallel der Geraden $\frac{d\varrho}{dt}$.

Ist M_1 ein beliebiger Punkt der Tangente und

$$OM_1 = \varrho_1,$$

so ist

$$\varrho_1 - \varrho = MM_1.$$

Da $\varrho_1 - \varrho$ dieselbe Richtung wie $\frac{d\varrho}{dt}$ hat, so ist

$$V(\varrho_1 - \varrho)\frac{d\varrho}{dt} = 0$$

die Gleichung der Tangente im Punkte M.

Wir wollen aus dieser Gleichung die bekannte Gleichung in Koordinaten ableiten.

Es sei

$$OM = i_1 x + i_2 y + i_3 z,$$
$$OM_1 = i_1 \xi + i_2 \eta + i_3 \zeta,$$

dann ist

$$\frac{d\varrho}{dt} = i_1 \frac{dx}{dt} + i_2 \frac{dy}{dt} + i_3 \frac{dz}{dt}$$

und

$$V(\varrho_1 - \varrho)\frac{d\varrho}{dt} = \left\{(\eta - y)\frac{dz}{dt} - (\zeta - z)\frac{dy}{dt}\right\} i_1 + \left\{(\zeta - z)\frac{dx}{dt} - (\xi - x)\frac{dz}{dt}\right\} i_2 + \left\{(\xi - x)\frac{dy}{dt} - (\eta - y)\frac{dx}{dt}\right\} i_3 = 0$$

und hieraus die Gleichung:

$$\frac{\xi - x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\eta - y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{\zeta - z}{\frac{dz}{dt}}.$$

Aus der Gleichung der Tangente ergeben sich die Winkel, welche die Tangente mit den Axen bildet:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{dx}{dt}}{T\frac{d\varrho}{dt}}$$

$$\cos\beta = \frac{\frac{dy}{dt}}{T\frac{d\varrho}{dt}}$$

$$\cos\gamma = \frac{\frac{dz}{dt}}{T\frac{d\varrho}{dt}}.$$

Es ist $Td\varrho$ gleich der absoluten unendlich kleinen Sehne

MM', welche mit ds bezeichnet wird und das „Bogenelement der Kurve“ im betreffenden Punkte heifst.

Also ist

$$T\frac{d\varrho}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \frac{ds}{dt}.$$

Da t eine beliebige Veränderliche ist, so können wir sie gleich s machen und bekommen die Gleichungen:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}, \quad T\frac{d\varrho}{ds} = 1,$$

und

$$S\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2 = -1.$$

Differentiieren wir diesen Skalaren nach s, so erhalten wir

$$S\frac{d\varrho}{ds}\cdot\frac{d^2\varrho}{ds^2} = 0.$$

Diese Gleichung sagt uns, dafs „der Vektor $\frac{d^2\varrho}{ds^2}$ senkrecht auf dem Einheitsvektor $\frac{d\varrho}{ds}$ d. h. auf der Tangente steht“.

Die „Normalen“ eines Punktes der Kurve stehen senkrecht auf der Tangente in jenem Punkte, sie liegen also in einer Ebene — der „Normalebene“. Diese Ebene gehe durch den Endpunkt von ϱ_1; es liegt also in der Ebene der Vektor $\varrho_1 - \varrho$ und die Ebene steht senkrecht auf dem Vektor $\frac{d\varrho}{dt}$, mithin ist die Gleichung der Normalebene

$$S(\varrho - \varrho_1)\frac{d\varrho}{dt} = 0.$$

Durch die Tangente gehen unendlich viele Ebenen, welche mit der Kurve zwei unendlich nahe Punkte gemein haben. Eine von diesen Tangentialebenen wird zwei aufeinanderfolgende Tangenten der Kurve enthalten, also durch drei unendlich nahe Punkte der Kurve gehen. Die Ebene, welche durch drei unendlich nahe Punkte der Kurve geht, heifst „Oskulations- oder Schmiegungsebene“ oder auch „Krümmungsebene“ der Kurve.

Die Schmiegungsebene geht durch die Endpunkte der Vektoren

$$\varrho, \quad \varrho + d\varrho, \quad \varrho + 2d\varrho + d^2\varrho,$$

und liegt der Endpunkt von ϱ_1 in der Schmiegungsebene, so ist deren Gleichung

$$S(\varrho_1 - \varrho)d\varrho(d\varrho + d^2\varrho) = 0,$$

oder

$$S(\varrho_1 - \varrho)\frac{d\varrho}{dt}\frac{d^2\varrho}{dt^2} = 0,$$

da $S\alpha\beta^2 = 0$ ist.

Aus der Gleichung der Schmiegungsebene folgt, dafs die Vektoren $\varrho_1 - f(t)$, $\frac{df(t)}{dt}$, $\frac{d^2f(t)}{dt^2}$ in der Schmiegungsebene liegen.

Nehmen wir statt der Variabeln t die Gröfse s, so hat $\frac{d^2f(s)}{ds}$ die Richtung einer Normalen in der Schmiegungsebene. Die Normale in der Schmiegungsebene heifst die „Hauptnormale". Ziehen wir einen Vektor ϱ nach einem Punkte der Hauptnormalen, so ist deren Gleichung:

$$V[\varrho - f(s)]\frac{d^2f(s)}{ds^2} = 0.$$

Sind λ, μ, ν die Neigungswinkel der Hauptnormalen gegen die Achsen, so ist

$$\cos\lambda = \frac{d^2x}{ds^2}\,Tr,$$

$$\cos\mu = \frac{d^2y}{ds^2}\,Tr,$$

$$\cos\nu = \frac{d^2z}{ds^2}\,Tr,$$

$$Tr = \frac{1}{T\frac{d^2f(s)}{ds^2}}.$$

Die Länge Tr heifst der „Krümmungsradius". Um diesen Krümmungsradius zu finden, soll der Kreis bestimmt werden, welcher mit der gegebenen Curve drei unendlich nahe Punkte gemein hat. Dieser Kreis, welcher „Oskulationskreis" heifst, hat seinen Mittelpunkt in der Schmiegungsebene.

Ist P der Mittelpunkt einer Kugel, M ein Punkt der Kugel, so ist

$PM - PO = r =$ Radius der Kugel nach Lage und Gröfse

oder

$$\varrho - \varrho_1 = r.$$

Da die Länge von r für die Kugel konstant ist, so ist die Gleichung der Kugel

$$T(\varrho - \varrho_1) = Tr = \text{konstant}$$

oder

$$S(\varrho - \varrho_1)^2 = Sr^2.$$

Da der Kreis, mithin auch die Kugel, durch einen Punkt der Curve geht, so ist $\varrho = f(s)$.

Die Kugel geht aber noch durch die Endpunkte der Vektoren

$$\varrho + d\varrho, \quad \varrho + 2d\varrho + d^2\varrho,$$

also ist

$$S(\varrho + d\varrho - \varrho_1)^2 = Sr^2$$
$$S(\varrho + 2d\varrho + d^2\varrho - \varrho_1)^2 = Sr^2.$$

Wenn wir aber wie in der Differentialrechnung die Glieder, welche gegen die anderen Glieder unendlich klein sind, vernachlässigen, so erhalten wir die Gleichungen:

$$S(\varrho - \varrho_1)\frac{d\varrho}{ds} = 0$$

$$S(\varrho - \varrho_1)\frac{d^2\varrho}{ds^2} = 1,$$

wozu noch die Gleichung der Oskulationsebene kommt:

$$S(\varrho - \varrho_1)\frac{d\varrho}{ds}\frac{d^2\varrho}{ds^2} = 0.$$

Aus der Gleichung der Schmiegungsebene folgt, dafs

$$(\varrho - \varrho_1)\frac{d\varrho}{ds}\frac{d^2\varrho}{ds^2}$$

ein Vektor ist.

Mithin ist

$$\frac{d\varrho}{ds}\frac{d^2\varrho}{ds^2}(\varrho - \varrho_1) = V\frac{d\varrho}{ds}\frac{d^2\varrho}{ds^2}(\varrho - \varrho_1) = \frac{d\varrho}{ds},$$

wenn wir die Gleichungen für die Kugel beachten.

Aus der letzten Gleichung folgt

$$\varrho - \varrho_1 = r = \frac{1}{\frac{d^2\varrho}{ds^2}}.$$

Diese Gleichung bestimmt r vollständig und es ergiebt sich der Wert für Tr wie oben.

Ist aber die Gleichung der Curve $\varrho = f(t)$, so sind unsere Gleichungen

$$S(\varrho - \varrho_1)^2 = Sr^2$$

$$S(\varrho - \varrho_1)\frac{d\varrho}{dt} = 0$$

$$S(\varrho - \varrho_1)\frac{d^2\varrho}{dt^2} = -S\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2$$

$$S(\varrho - \varrho_1)\frac{d\varrho}{dt}\frac{d^2\varrho}{dt^2} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$(\varrho - \varrho_1)\frac{d^2\varrho}{dt^2}\frac{d\varrho}{dt} = V(\varrho - \varrho_1)\frac{d^2\varrho}{dt^2}\frac{d\varrho}{dt}$$

$$= (\varrho - \varrho_1) S\frac{d^2\varrho}{dt^2}\frac{d\varrho}{dt} - \frac{d^2\varrho}{dt^2} S(\varrho - \varrho_1)\frac{d\varrho}{dt} + \frac{d\varrho}{dt} S(\varrho - \varrho_1)\frac{d^2\varrho}{dt^2}$$

$$= (\varrho - \varrho_1) S\frac{d^2\varrho}{dt^2}\frac{d\varrho}{dt} - \frac{d\varrho}{dt} S\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2.$$

Daher

$$(\varrho - \varrho_1) V\frac{d^2\varrho}{dt^2}\frac{d\varrho}{dt} = -\frac{d\varrho}{dt} S\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 = \frac{d\varrho}{dt}\left\{T\frac{d\varrho}{dt}\right\}^2$$

und

$$T(\varrho - \varrho_1) = Tr = \frac{T\frac{d\varrho}{dt}\left\{T\frac{d\varrho}{dt}\right\}^2}{TV\frac{d^2\varrho}{dt^2}\frac{d\varrho}{dt}}.$$

Die absolute Länge des Krümmungsradius können wir auch auf folgende Art finden.

Es seien zwei Einheitsvektoren ϱ und ϱ_1 gegeben. Der Winkel, welchen diese Vektoren mit einander bilden, ist bestimmt durch die Gleichung

$$\cos u = - S\varrho\varrho_1$$

und hieraus

$$2(1 - \cos u) = 2 + 2S\varrho\varrho_1 = - S\varrho^2 - S\varrho_1^2 + 2S\varrho\varrho_1$$

oder

$$4\sin^2\frac{u}{2} = - S(\varrho - \varrho_1)^2,$$

da

$$S\varrho^2 = -1, \quad S\varrho_1{}^2 = -1$$

ist.

Nehmen wir nun die Vektoren ϱ und ϱ_1 zwei aufeinander folgenden Linien eines Systems parallel, so wird u unendlich klein und $\varrho - \varrho_1$ wird zu $d\varrho$, und es ist

$$u = T\,d\varrho.$$

Ist u der Winkel, den zwei aufeinander folgende Tangenten bilden — „Kontingenzwinkel“ —, so ist hier

$$\varrho = \frac{d\varrho}{ds}$$

und es ist

$$\frac{ds}{u} = \frac{1}{T\frac{d^2\varrho}{ds^2}} = Tr.$$

Der Quotient $\frac{u}{ds}$ bestimmt die „erste Krümmung“ der Curve. Nehmen wir nämlich die Krümmung eines mit der Linieneinheit beschriebenen Kreises als Einheit der Krümmung an, so verhalten sich die Krümmungen zweier Kreise umgekehrt wie die Radien, und es ist der reziproke Wert des Radius das Maſs der Krümmung eines Kreises. Es ist also $\frac{u}{ds}$ die Krümmung des Krümmungskreises.

Der Krümmungsmittelpunkt auf der Schmiegungsebene ist für jeden Punkt der Curve bestimmt durch die Gleichung

$$\varrho = f(s) - [f''(s)]^{-1},$$

wenn gesetzt wird:

$$\frac{d^2 f(s)}{ds^2} = f''(s).$$

Lassen wir hier ϱ variabel sein, so ist dies die Gleichung einer Kurve, gebildet aus der Folge der Krümmungsmittelpunkte — „Kurve der Krümmungsmittelpunkte“.

Der Krümmungsmittelpunkt gehört den zwei aufeinander folgenden Normalebenen

$$S(\varrho - \varrho_1)\frac{d\varrho}{ds} = 0$$

$$S(\varrho - \varrho_1)\frac{d^2\varrho}{ds^2} = 1 - S(\varrho - \varrho_1)\frac{d\varrho}{ds}$$

an und liegt in der Schmiegungsebene

$$S(\varrho - \varrho_1)\frac{d\varrho}{ds}\frac{d^2\varrho}{ds^2} = 0.$$

Der Krümmungsmittelpunkt liegt also in der Schnittlinie von zwei aufeinander folgenden Normalebenen, d. h. in der „Krümmungsachse".

Da die beiden Normalebenen auf der Schmiegungsebene senkrecht stehen, so ist auch die Krümmungsachse senkrecht auf der Schmiegungsebene. In der Schmiegungsebene liegen die Vektoren $\frac{df(s)}{ds} = f'(s)$ und $f''(s)$, mithin ist die Krümmungsachse parallel dem Vektor $Vf'(s)f''(s)$. Die Gleichung der Krümmungsachse ist daher

$$\varrho = f(s) - [f''(s)]^{-1} + x\, Vf'(s)f''(s).$$

Dies ist die Gleichung einer geradlinigen Fläche, deren Fundamentalkurve die Kurve der Krümmungsmittelpunkte ist und deren Erzeugenden mit den Krümmungsachsen zusammenfallen. Ziehen wir an die gegebene Kurve alle Hauptnormalen, so bilden diese eine geradlinige Fläche und zwar so, daſs „zwei aufeinander folgende Erzeugenden — Hauptnormalen — sich im allgemeinen nicht schneiden". Die Gleichung der Hauptnormalen ist

$$V[\varrho - f(s)]\frac{d^2f(s)}{ds^2} = 0,$$

wenn $\varrho = f(s)$ die Gleichung der Curve ist.

Für die folgende Hauptnormale besteht die Gleichung

$$V\left[\varrho - f(s) - \frac{df(s)}{ds}ds\right]\frac{d^2\left[f(s) + \frac{df(s)}{ds}ds\right]}{ds^2} = 0$$

oder

$$0 = V[\varrho - f(s)]\frac{d^2f(s)}{ds^2} + V[\varrho - f(s)]\frac{d^3f(s)}{ds^3}ds$$
$$+ V\frac{df(s)}{ds}ds\left(\frac{d^2f(s)}{ds^2} + \frac{d^3f(s)}{ds^3}ds\right).$$

Gesetzt die beiden Normalen schnitten sich, dann folgt aus den Gleichungen dieser Normalen

$$0 = V[\varrho - f(s)]\frac{d^3f(s)}{ds^3} + V\frac{df(s)}{ds}\frac{d^2f(s)}{ds^2} + V\frac{df(s)}{ds}\frac{d^3f(s)}{ds^3}ds.$$

Multiplicieren wir diese Gleichung mit $\frac{d^3 f(s)}{ds^3}$, nehmen den Skalarteil, so erhalten wir die Gleichung:

$$S\,\frac{df(s)}{ds}\cdot\frac{d^2 f(s)}{ds^2}\cdot\frac{d^3 f(s)}{ds^3}=0,$$

d. h.

$$\frac{df(s)}{ds},\ \frac{d^2 f(s)}{ds^2},\ \frac{d^3 f(s)}{ds^3}$$

liegen in einer Ebene. Sollen aber diese Vektoren in einer Ebene liegen, so müssen zwei aufeinander folgende Schmiegungsebenen zusammenfallen. Im allgemeinen decken sich aber diese Schmiegungsebenen nicht. Zu diesem falschen Resultat sind wir durch die Annahme, dafs sich zwei aufeinander folgende Hauptnormalen schnitten, gelangt; diese Annahme ist mithin falsch und der Satz erwiesen.

Ähnlich können wir folgenden Satz beweisen:

„Wenn wir an die Kurve der Krümmungsmittelpunkte eine Tangente ziehen, so schneidet diese Tangente die gegebene Kurve im allgemeinen nicht in dem Punkte, zu welchem der Tangente Berührungspunkt Krümmungsmittelpunkt ist.“

Die Gleichung der Tangente an der Krümmungsmittelpunktkurve ist

$$V\{\varrho-[f(s)-f''(s)^{-1}]\}\,\frac{d\left(f(s)-f''(s)^{-1}\right)}{ds}=0.$$

Soll diese Gerade durch den zugehörigen Punkt der gegebenen Curve gehen, so mufs die Gleichung richtig sein für $\varrho = f(s)$. Setzen wir diesen Wert ein, lösen die Gleichung nach der Formel

$$2\,V\alpha\beta=\alpha\beta-\beta\alpha$$

auf, multiplicieren die so erhaltene Gleichung mit $[f''(s)]^2 f'''(s)$, nehmen den Skalarteil, so erhalten wir die falsche Gleichung

$$S\,\frac{df(s)}{ds}\cdot\frac{d^2 f(s)}{ds^2}\cdot\frac{d^3 f(s)}{ds^3}=0.$$

Hiermit ist der Satz bewiesen und da, wie wir bald sehen werden, diese letzte Gleichung aussagt, dafs die Kurve in einer Ebene liegt, gezeigt, dafs bei „einer ebenen Kurve die Tan-

gente an die Kurve der Krümmungsmittelpunkte — „Evolute“ — durch den entsprechenden Punkt der gegebenen Kurve geht, und daher Normale in diesem Punkte ist.“

Neunte Vorlesung.

Zweite Krümmung. Schmiegungskugel. Osculation von Kurven.

Je zwei aufeinander folgende Schmiegungsebenen schliefsen einen unendlich kleinen Winkel mit einander ein, welcher das Mafs für die „zweite Krümmung“ dieser Kurve abgiebt. Als „zweite Krümmung“ einer Kurve sehen wir das Verhältnis des Winkels zweier unendlich nahen Schmiegungsebenen zum zugehörigen Bogenelement an; dieser Quotient ergiebt die Abweichung der Schmiegungsebenen der Kurve von einer und derselben Ebene. Weil die Kurve zwei Krümmungen hat, heifst sie „Kurve doppelter Krümmung“.

Der Winkel zwischen den Schmiegungsebenen ist aber gleich dem Winkel, welchen die beiden Normalen auf den resp. Schmiegungsebenen — die „Binormalen“ — einschliefsen.

In der Schmiegungsebene liegen die beiden Vektoren $\frac{d\varrho}{ds}$ und $\frac{d^2\varrho}{ds^2}$. Auf diesen Vektoren, mithin auf der Schmiegungsebene, steht der Vektor $V\frac{d\varrho}{ds}\frac{d^2\varrho}{ds^2}$ senkrecht. Ziehen wir durch den Vektorenursprung eine Parallele zu dieser Normale und machen sie an Länge gleich der Einheit, so ist deren Gleichung

$$\varrho = \frac{d\varrho}{ds}\frac{d^2\varrho}{ds^2} : T\frac{d^2\varrho}{ds^2},$$

da ist

$$S\frac{d\varrho}{ds}\frac{d^2\varrho}{ds^2} = 0, \quad T\frac{d\varrho}{ds} = 1.$$

Wie in der letzten Vorlesung erhalten wir

$$\frac{w}{ds} = T\frac{d\left(\frac{d\varrho}{ds}\frac{d^2\varrho}{ds^2}\right) : T\frac{d^2\varrho}{ds^2}}{ds},$$

wenn w der Winkel ist, den zwei aufeinander folgende Binormalen einschliefsen.

Beachten wir die Gleichungen

$$S\frac{d\varrho}{ds}\frac{d^2\varrho}{ds^2}=0,\quad \left(T\frac{d^2\varrho}{ds^2}\right)^2=-S\left(\frac{d^2\varrho}{ds^2}\right)^2$$

so erhalten wir

$$\frac{w}{ds}=\frac{1}{Tr_1}=\frac{S\frac{d\varrho}{ds}\frac{d^2\varrho}{ds^2}\frac{d^3\varrho}{ds^3}}{S\left(\frac{d^2\varrho}{ds^2}\right)^2}.$$

Diese Länge Tr_1 tragen wir auf der Binormalen $\frac{d\varrho}{ds}\cdot\frac{d^2\varrho}{ds^2}$ ab.

Der Anfangspunkt dieser Normalen ist der Endpunkt von ϱ und wenn der Endpunkt von ϱ_1 auf dieser Normalen liegt, so ist

$$\varrho_1=\varrho+x\frac{d\varrho}{ds}\frac{d^2\varrho}{ds^2}:T\frac{d^2\varrho}{ds^2}.$$

Es soll aber sein

$$T(\varrho_1-\varrho)=\frac{\left(T\frac{d^2\varrho}{ds^2}\right)^2}{S\frac{d\varrho}{ds}\frac{d^2\varrho}{ds^2}\frac{d^3\varrho}{ds^3}}=x,$$

mithin ist R der Länge und Richtung nach gegeben durch die Gleichung

$$\varrho_1=\varrho+\frac{d\varrho}{ds}\frac{d^2\varrho}{ds^2}\frac{T\frac{d^2\varrho}{ds^2}}{S\frac{d\varrho}{ds}\frac{d^2\varrho}{ds^2}\frac{d^3\varrho}{ds^3}}.$$

Verschwindet die zweite Krümmung, so ist $w=0$ und

$$S\frac{d\varrho}{ds}\frac{d^2\varrho}{ds^2}\frac{d^3\varrho}{ds^3}=0.$$

Die beiden Schmiegungsebenen fallen in eine Ebene.

Es ist aber auch

$$T\frac{d\frac{d\varrho}{ds}\frac{d^2\varrho}{ds^2}:T\frac{d^2\varrho}{ds^2}}{ds}=0.$$

Wenn wir setzen

$$\alpha=a_1i_1+a_2i_2+a_3i_3$$

so ist

$$T\alpha=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

und diese Gröfse ist gleich Null, wenn $a_1=a_2=a_3=0$.

Beachten wir, dafs ist

$$\frac{d\varrho}{ds}\frac{d^2\varrho}{ds^2} = i_1(y'z'' - z'y'') + i_2(z'x'' - x'z'') + i_3(x'y'' - y'x''),$$

und wenn $p''''\cdots = \frac{d^n\varrho}{ds^n}$ und $r = \frac{1}{T\frac{d^2\varrho}{ds^2}}$, so erhalten wir die Gleichungen:

$$r(y'z'' - z'y'') = c$$
$$r(z'x'' - x'z'') = c_1$$
$$r(x'y'' - y'x'') = c_2.$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit x', y', z' und addieren, so erhalten wir

$$-rS\frac{d\varrho}{ds}\frac{d^2\varrho}{ds^2}\frac{d^3\varrho}{ds^3} = cx' + c_1y' + c_2z' = 0$$

und daraus folgt

$$cx + c_1y + c_2z = c_3.$$

Dies ist aber die Gleichung einer Ebene, d. h. alle Punkte der Kurve liegen in einer Ebene, die Kurve ist eben.

„Verschwindet aber die erste Krümmung, so ist die Kurve eine Gerade."

In diesem Fall ist

$$T\frac{d^2\varrho}{ds^2} = 0$$

oder

$$S\left(\frac{d^2\varrho}{ds^2}\right)^2 = 0.$$

Diese Gleichung kann nur stattfinden, wenn

$$x'' = 0, \quad y'' = 0, \quad z'' = 0$$

und hieraus

$$i_1x' + i_2y' + i_3z' = i_1c_1 + i_2c_2 + i_3c_3,$$

mithin

$$\varrho = \text{einem bestimmten Vektoren.}$$

Da die Krümmungsachse durch den Krümmungsmittelpunkt geht und senkrecht auf der Schmiegungsebene steht, so ist jeder Punkt der Krümmungsachse von drei aufeinander folgenden Punkten M, M_1, M_2 der Kurve gleichweit entfernt und ist also Centrum einer Kugel, welche durch diese drei Punkte

geht. Wir können daher sagen: „Die Krümmungsachse ist der Ort für die Centra der Schar Kugeln, welche mit der Kurve drei unendlich nahe Punkte gemein hat.“ Der Krümmungskreis ist der Durchschnitt aller dieser Kugeln. Unter diesen Kugeln sind besonders drei bemerkenswert: 1) die kleinste von ihnen; deren Mittelpunkt und Radius sind der Krümmungsmittelpunkt und der Krümmungsradius, weil von den Punkten der Krümmungsachse der Krümmungsmittelpunkt die kürzeste Entfernung von der Kurve hat; 2) die gröfste der Kugeln, nämlich die Oskulationsebene, deren Radius unendlich grofs ist und deren Mittelpunkt auf der Krümmungsachse unendlich fern liegt; und 3) die Kugel, deren Mittelpunkt der Durchschnittspunkt zweier aufeinander folgenden Krümmungsachsen ist. Diese letzte Kugel hat mit der Kurve vier unendlich nahe Punkte gemein; sie heifst „Schmiegungskugel“. Da der Kugel Mittelpunkt auf einer Krümmungsachse liegt, so geht sie durch die Punkte M, M_1, M_2, und weil der Mittelpunkt auch auf der folgenden Krümmungsachse sich befindet, so geht auch die Kugel durch die Punkte M_1, M_2, M_3, sie hat also mit der Kurve die vier Punkte M, M_1, M_2, M_3 gemein. Da durch vier Punkte eine Kugel bestimmt ist, so ist dies die einzige Kugel derart.

Diese Kugel habe die Gleichung

$$S(\varrho_1 - \varrho)^2 = Sr^2, \quad \varrho = f(s),$$

dann bestehen noch die Gleichungen

$$\begin{aligned} S(\varrho_1 - \varrho)\frac{d\varrho}{ds} &= 0 \\ S(\varrho_1 - \varrho)\frac{d^2\varrho}{ds^2} &= S\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2 \\ S(\varrho_1 - \varrho)\frac{d^3\varrho}{ds^3} &= 0. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt auch sofort, dafs der Mittelpunkt der Oskulationskugel mit dem Schnittpunkt zweier aufeinander folgenden Krümmungsachsen zusammenfällt.

Um diesen Mittelpunkt zu erhalten, setzen wir in die allgemeine Formel

$$V\alpha \,.\, \beta \,.\, \gamma = V\gamma \,.\, \beta \,.\, \alpha = \alpha S\beta\gamma - \beta S\alpha\gamma + \gamma S\alpha\beta$$

zuerst

$$\alpha = \varrho_1 - \varrho\,,\quad \beta = \frac{d^2\varrho}{ds^2}\,\frac{d\varrho}{ds}\,,\quad S\beta = 0\,,\quad \gamma = \frac{d^3\varrho}{ds^3}\,,$$

und dann

$$\alpha = \frac{d^3\varrho}{ds^3}\,,\quad \beta = \frac{d^2\varrho}{ds^2}\,,\quad \gamma = \frac{d\varrho}{ds}\,(\varrho_1 - \varrho)\,,\quad S\gamma = 0\,.$$

Setzen wir beide Resultate gleich, berücksichtigen obige Gleichungen und die Formel

$$V(\beta V\gamma\alpha) = \alpha S\beta\gamma - \gamma S\beta\alpha,$$

so erhalten wir für den Ort jener Mittelpunkte die Gleichung

$$\varrho_1 - \varrho = \frac{V\dfrac{d\varrho}{ds}\dfrac{d^3\varrho}{ds^3}}{S\dfrac{d\varrho}{ds}\dfrac{d^2\varrho}{ds^2}\dfrac{d^3\varrho}{ds^3}}\,,$$

mithin für die absolute Länge des Radius

$$Tr_1 = \frac{TV\dfrac{d\varrho}{ds}\dfrac{d^3\varrho}{ds^3}}{S\dfrac{d\varrho}{ds}\dfrac{d^2\varrho}{ds^2}\dfrac{d^3\varrho}{ds^3}}\,.$$

Da der Endpunkt von ϱ_1 auf der Krümmungsachse liegt und die Gleichung der Krümmungsachse

$$\varrho_1 = \varrho - \left(\frac{d^2\varrho}{ds^2}\right)^{-1} + x\,\frac{d\varrho}{ds}\,\frac{d^2\varrho}{ds^2}$$

ist, so erhalten wir zur Bestimmung von x die Gleichung

$$-\left(\frac{d^2\varrho}{ds^2}\right)^{-1} + x\,\frac{d\varrho}{ds}\,\frac{d^2\varrho}{ds^2} = \frac{V\dfrac{d\varrho}{ds}\dfrac{d^3\varrho}{ds^3}}{S\dfrac{d\varrho}{ds}\dfrac{d^2\varrho}{ds^2}\dfrac{d^3\varrho}{ds^3}}\,.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $\frac{d^3\varrho}{ds^3}$ und nehmen den Skalarteil, so ist:

$$x = \frac{S\dfrac{d^2\varrho}{ds^2}\dfrac{d^3\varrho}{ds^3}}{\left(\dfrac{d^2\varrho}{ds^2}\right)^2 S\dfrac{d\varrho}{ds}\dfrac{d^2\varrho}{ds^2}\dfrac{d^3\varrho}{ds^3}}\,,$$

mithin ist auch ϱ_1 durch die Gleichung

$$\varrho_1 = \varrho - \left(\frac{d^2\varrho}{ds^2}\right)^{-1} + \frac{d\varrho}{ds}\,\frac{d^2\varrho}{ds^2}\,\frac{S\dfrac{d^2\varrho}{ds^2}\dfrac{d^3\varrho}{ds^3}}{\left(\dfrac{d^2\varrho}{ds^2}\right)^2 S\dfrac{d\varrho}{ds}\dfrac{d^2\varrho}{ds^2}\dfrac{d^3\varrho}{ds^3}}$$

bestimmt.

Ist der Krümmungshalbmesser konstant, also

$$T\frac{d^2\varrho}{ds^2} = c,$$

oder

$$S\left(\frac{d^2\varrho}{ds^2}\right)^2 = -c,$$

also

$$S\frac{d^2\varrho}{ds^2}\frac{d^3\varrho}{ds^3} = 0,$$

und daher

$$\varrho_1 = \varrho - \left(\frac{d^2\varrho}{ds^2}\right)^{-1},$$

d. h.: „Bei allen Kurven doppelter Krümmung von konstantem Krümmungshalbmesser ist auch der Radius der Schmiegungskugel konstant, nämlich gleich dem Krümmungshalbmesser, und fällt die Kurve der Centra der Schmiegungskugeln mit der Kurve der Krümmungsmittelpunkte zusammen.“

Wir haben bis jetzt nur die Berührung von Kurven mit Kreisen resp. Kugeln betrachtet. Dies sind aber nur spezielle Fälle der Oskulation von Kurven untereinander.

Es seien vorerst zwei Kurven durch ihre Gleichungen

$$\varrho = f(t) \quad \text{und} \quad \varrho^* = \varphi(t)$$

gegeben.

Schneiden sich diese Kurven, so mufs der Wert von ϱ für den Schnittpunkt der beiden Gleichungen derselbe sein, und der Wert von t ergiebt sich aus

$$f(t) = \varphi(t).$$

Haben die beiden Gleichungen für einen Schnittpunkt die Eigenschaft, dafs der erste Differentialquotient von ϱ nach t in beiden derselbe ist, so haben die Kurven dieselbe Tangente resp. dieselbe Normalebene für den Punkt, für welchen die Gleichungen

$$f(t) = \varphi(t), \quad f'(t) = \varphi'(t)$$

bestehen.

Ist für den Punkt $f(t) = \varphi(t)$ noch der zweite Differen-

tialquotient von ϱ nach t in beiden Gleichungen derselbe, so ist in diesem Punkte beiden Kurven die Schmiegungsebene gemeinsam, also auch der Krümmungsmittelpunkt, die Krümmungsachse und die Hauptnormale.

In unserem ersten Falle haben die Kurven zwei unendlich nahe Punkte gemein, im zweiten Falle jedoch fallen drei unendlich nahe Punkte zusammen.

Ist $\varrho = f(t)$, $\varrho = \varphi(t)$ und $f(t) = \varphi(t)$, $\frac{df(t)}{dt} = \frac{d\varphi(t)}{dt}$, so sagen wir „die Kurven haben in dem betreffenden Punkte eine Berührung erster Ordnung".

Ist aufserdem noch $\frac{d^2f(t)}{dt^2} = \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}$, so sagen wir „die Kurven haben in dem betreffenden Punkte eine Berührung zweiter Ordnung".

Verallgemeinern wir dies, so können wir sagen:

„Zwei Kurven $\varrho = f(t)$, $\varrho = \varphi(t)$ håben eine Berührung $n$ter Ordnung, wenn $f(t) = \varphi(t)$ und die n ersten Differentialquotienten dieser Funktionen gleich sind."

Von der Theorie der Kurven im Raume bleibt uns noch manches zu sagen übrig. Das meiste davon können wir jedoch erst bei der Theorie der Flächen besprechen. Wir wollen hier nur noch von der sog. „ganzen Krümmung" und dem „Schmiegungskegel" handeln.

Verschieben wir zwei unendlich nahe Hauptnormalen sich selbst parallel bis sie sich schneiden, so ist der Winkel zwischen diesen beiden Geraden gleich dem Winkel der sich kreuzenden Hauptnormalen. Dieser Winkel, welcher natürlich unendlich klein ist, heifst „Winkel der ganzen Krümmung" im betreffenden Punkt der Kurve. Dieser Winkel mifst die Abweichungen zweier Hauptnormalen von einander, mithin die Windung der Kurve. Ist dieser Winkel gleich h, so heifst die Gröfse

$$\frac{1}{R} = \frac{h}{s}$$

„die ganze Krümmung der Kurve" in jenem Punkte und R „der Radius der ganzen Krümmung".

Ist die Kurve eine ebene Kurve, so ist der Winkel der Schmiegungsebenen Null und der Winkel der ganzen Krümmung wird zum Kontingenzwinkel und die ganze Krümmung wird zur Krümmung der ebenen Kurve.

Ist der Kontingenzwinkel der Kurve u, der Winkel der Schmiegungsebenen w, so ist

$$h^2 = w^2 + u^2,$$

also

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2},$$

wenn $\frac{1}{R_1}$ die erste und $\frac{1}{R_2}$ die zweite Krümmung ist.

Dieser Satz von Lancret läfst sich an einer Figur leicht beweisen.

Wir haben gesehen, dafs jeder Punkt der Krümmungsachse der Mittelpunkt einer Kugel ist, welche die Kurve in drei aufeinander folgenden Punkten berührt. Denken wir uns an die Kugeln berührende Kegel gelegt, deren Spitzen in die Krümmungsachsen fallen, so erhalten wir eine Schar gerader Kegel, welche die Kurve in drei aufeinander folgenden Punkten berührt. Die Erzeugenden der Kegel stehen auf den Radien der Kugeln senkrecht. Alle diese Kegel enthalten den Krümmungskreis. Unter diesen Kegeln sind folgende beachtenswert: 1) Die Schmiegungsebene, als ein Kegel, dessen Spitze in den Krümmungsmittelpunkt fällt; 2) der Cylinder, dessen Erzeugende der Krümmungsachse parallel laufen; und 3) der Kegel, welcher mit der Kurve noch einen vierten Punkt gemein hat. Dieser letzte Kegel heifst „Schmiegungskegel“. Ist C der Krümmungsmittelpunkt, K der Mittelpunkt der Oskulationskugel und S die Spitze des Kegels, so ist

$$T(CK \,.\, CS) = R_1^2.$$

Denken wir uns hier CK und $R_1^2 = \frac{1}{\left(T\frac{d^2 f(s)}{ds^2}\right)^2}$ eingesetzt; nehmen wir $R_1 =$ konstant, so ist die Länge von CS unendlich grofs, d. h. der Schmiegungskegel ist ein Cylinder.

Zehnte Vorlesung.

Tangentialebene und Normale von Flächen.

Bevor wir zu unserer Untersuchung gehen, wollen wir die gebräuchlichsten Abkürzungen anführen.

Ist die Gleichung der Fläche in der bekannten Form

$$z = f(x, y)$$

gegeben, so bestehen folgende Bezeichnungen:

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q, \quad \frac{dp}{dx} = \frac{d^2z}{dx^2} = r$$

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} = \frac{d^2z}{dx \, . \, dy} = s, \quad \frac{dq}{dy} = \frac{d^2z}{dy^2} = t$$

$$n^2 = p^2 + q^2 + r^2.$$

Hat die Gleichung die Form

$$0 = F(x, y, z),$$

so sind folgende Abkürzungen gebräuchlich:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F'(x) = P; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = F'(y) = Q; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = F'(z) = R;$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = L, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = M, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = N,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \, \partial z} = L', \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z \, \partial x} = M', \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y} = N'.$$

Sind die Gleichungen der Fläche

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v)$$

oder

$$\varrho = f(u, v),$$

so setzen wir:

$$\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} = A$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} = B$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = C.$$

Hieraus folgt sofort

$$V \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \, . \, \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} = A i_1 + B i_2 + C i_3.$$

Weiter ist

$$A\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+B\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+C\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=D$$

$$A\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+B\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}+C\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=D'$$

$$A\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+B\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}+C\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=D''.$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=E$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=F$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=G,$$

oder

$$-S\left\{\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u^2}\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\right\}=D$$

$$-S\left\{\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\right\}=D'$$

$$-S\left\{\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial v^2}\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\right\}=D''$$

$$-S\left\{\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\right\}^2=E$$

$$-S\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}=F$$

$$-S\left\{\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\right\}^2=G.$$

Es ist, wenn wir $f=f(u,v)$ setzen:

$$S\left\{V\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\cdot V\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\right\}$$

$$=S\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 S\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2-\left\{S\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}\right\}^2,$$

also

$$A^2+B^2+C^2=EG-F^2.$$

Setzen wir:

$$V\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}=n,$$

so ist

$$Sn\frac{\partial n}{\partial u}\frac{\partial n}{\partial v}=S\left\{nV\frac{\partial n}{\partial u}\frac{\partial n}{\partial v}\right\}$$

$$=S\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial n}{\partial v}\cdot S\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial n}{\partial u}-S\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial n}{\partial u}\cdot S\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial n}{\partial v}.$$

Wenn wir den Wert von n einsetzen, so erhalten wir

$$S\,V\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial V\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}}{\partial u}\cdot\frac{\partial V\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}}{\partial v}$$

$$=\left\{S\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}\right\}^2-S\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}\cdot S\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}$$

oder auch

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ \frac{\partial A}{\partial u} & \frac{\partial B}{\partial u} & \frac{\partial C}{\partial u} \\ \frac{\partial A}{\partial v} & \frac{\partial B}{\partial v} & \frac{\partial C}{\partial v} \end{vmatrix} = DD''-D'^2.$$

Erheben wir diese Gleichung ins Quadrat, so erhalten wir

$$\begin{vmatrix} A^2+B^2+C^2, & A\frac{\partial A}{\partial u}+B\frac{\partial B}{\partial u}+C\frac{\partial C}{\partial u}, & A\frac{\partial A}{\partial v}+B\frac{\partial B}{\partial v}+C\frac{\partial C}{dv} \\ A\frac{\partial A}{\partial u}+B\frac{\partial B}{\partial u}+C\frac{\partial C}{\partial u}, & \left(\frac{\partial A}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial B}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)^2, & \frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial A}{\partial v}+\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial B}{\partial v}+\frac{\partial C}{\partial u}\frac{\partial C}{\partial v} \\ A\frac{\partial A}{\partial v}+B\frac{\partial B}{\partial v}+C\frac{\partial C}{\partial v}, & \frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial A}{\partial v}+\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial B}{\partial v}+\frac{\partial C}{\partial u}\frac{\partial C}{\partial v}, & \left(\frac{\partial A}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial B}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial C}{\partial v}\right)^2 \end{vmatrix}$$

$$=(DD''-D'^2)^2.$$

Es ist aber

$$A^2+B^2+C^2=EG-F^2,$$

und hieraus finden wir

$$A\frac{\partial A}{\partial u}+B\frac{\partial B}{\partial u}+C\frac{\partial C}{\partial u}=\text{Funktion von } E,\ F \text{ und } G,$$

$$A\frac{\partial A}{\partial v}+B\frac{\partial B}{\partial v}+C\frac{\partial C}{\partial v}=\text{Funktion von } E,\ F \text{ und } G.$$

Zerlegen wir $S\left(\frac{\partial n}{\partial u}\right)^2$ und $S\left(\frac{\partial n}{\partial v}\right)^2$ in die möglichst einfachen Produkte von Skalaren, so bemerken wir, daſs diese Gröſsen auch nur von E, F, G abhängen. Und durch thatsächliche Ausrechnung ist leicht zu sehen, daſs auch $S\frac{\partial n}{\partial u}\frac{\partial n}{\partial v}$ nur von E, F, G abhängt.

Wir erhalten nämlich

$$4(DD'' - D'^2) = E\left[\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial v} - 2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v} + \left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2\right]$$

$$+ F\left(\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial u} - 2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u} - 2\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial E}{\partial v} + 4\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v}\right)$$

$$+ G\left[\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u} - 2\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial E}{\partial u} + \left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2\right]$$

$$- 2(EG - F^2)\left(\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right).$$

Es sei eine Fläche $\varrho = f(u, v)$ gegeben. Wir legen durch einen Punkt der Fläche eine Kurve, welche ganz auf der Fläche sich befindet. Die Gleichung dieser Kurve sei $\varrho = f(t)$, und und da sie ganz auf der Fläche liegt, so ist für jeden ihrer Punkte

$$\varphi(t) = f(u, v).$$

Die Gleichung der Tangente in einem Punkte der Kurve ist

$$V[\varrho - f(u, v)]\frac{d\varphi(t)}{dt} = 0.$$

Es ist aber

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v}\frac{dv}{dt}.$$

Mithin ist die Gleichung jener Tangente

$$V[\varrho - f(u, v)]\left(\frac{\partial f(u, v)}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right) = 0.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $\frac{\partial f(u, v)}{\partial u}$ oder mit $\frac{\partial f(u, v)}{\partial v}$ und nehmen den Skalarteil, so erhalten wir die Gleichung:

$$S[\varrho - f(u, v)]\, n = 0, \quad n = V\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Diese Gleichung hat statt für einen Punkt einer Kurve auf der Fläche, wenn der Endpunkt von ϱ auf der Tangente der Kurve liegt. In dieser Gleichung kommt nur der Vektor des Punktes auf der Fläche und der Vektor ϱ vor, aber keine Spur von der speziellen Kurve, welche wir auf der Fläche

gezogen haben. Ziehen wir also durch denselben Punkt alle möglichen Kurven auf der Fläche, so liegen alle Tangenten jener Kurve auf der Ebene, welche unsere Gleichung darstellt. Daher heifst diese Ebene „Tangentialebene“. Die Vektoren $\frac{\partial f(u, v)}{\partial u}$ und $\frac{\partial f(u, v)}{\partial v}$ liegen in dieser Ebene.

„Der Ort aller Tangenten aller Kurven, welche durch einen Punkt einer Fläche gehen und auf der Fläche liegen, ist eine Ebene

$$S[\varrho - f(u, v)]n = 0.\text{“}$$

Aus dieser Gleichung folgt, dafs n senkrecht auf der Tangentialebene steht. Der Vektor n hat die Richtung der „Normalen“, und deren Gleichung ist

$$V[\varrho - f(u, v)]\, n = 0.$$

Durch den Ursprung der Vektoren ziehen wir einen Vektor von der Längeneinheit parallel n. Es ist dann

$$R = \frac{n}{Tn}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, da $R^2 = -1$ die Gleichung einer Kugel ist und $\frac{\partial R}{\partial u}$, $\frac{\partial R}{\partial v}$ senkrecht auf R stehen, also, da sie der Tangentialebene der Fläche parallel liegen:

$$SR\frac{\partial f}{\partial u} = 0, \quad SR\frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad SR^2 = -1,$$

$$SR\frac{\partial R}{\partial u} = SR\frac{\partial R}{\partial v} = 0.$$

Wir können also setzen

$$\frac{\partial f}{\partial u} = a\frac{\partial R}{\partial u} + b\frac{\partial R}{\partial v}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = a'\frac{\partial R}{\partial u} + b'\frac{\partial R}{\partial v}.$$

Setzen wir dies in die Gleichung der Tangentialebene, so erhalten wir

$$S[\varrho - f(u, v)]\, R = 0$$

$$S[\varrho - f(u, v)]\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial v} = 0$$

und natürlich

$$V\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial v} = x\,.\,R.$$

Es ist auch die Gleichung der Tangente an die Kurve $\varrho = \varphi(t)$

$$V[\varrho - f(u, v)] \left(\frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \frac{dv}{dt}\right) = 0$$

oder

$$V[\varrho - f(u, v)] \left[\left(a \frac{du}{dt} + a' \frac{dv}{dt}\right) \frac{\partial R}{\partial u} + \left(b \frac{du}{dt} + b' \frac{dv}{dt}\right) \frac{\partial R}{\partial v}\right] = 0.$$

Aus diesen Gleichungen finden wir die Winkel, welche die Tangente mit den Axen bildet:

$$\cos a = \frac{\frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt}}{\frac{ds}{dt}}$$

$$= l \left\{\left(a \frac{du}{dt} + a' \frac{dv}{dt}\right) \frac{\partial X}{\partial u} + \left(b \frac{du}{dt} + b' \frac{dv}{dt}\right) \frac{\partial X}{\partial v}\right\},$$

$$\cos b = \frac{\frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dt}}{\frac{ds}{dt}}$$

$$= l \left\{\left(a \frac{du}{dt} + a' \frac{dv}{dt}\right) \frac{\partial Y}{\partial u} + \left(b \frac{du}{dt} + b' \frac{dv}{dt}\right) \frac{\partial Y}{\partial v}\right\},$$

$$\cos c = \frac{\frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt}}{\frac{ds}{dt}}$$

$$= l \left\{\left(a \frac{du}{dt} + a' \frac{dv}{dt}\right) \frac{\partial Z}{\partial u} + \left(b \frac{du}{dt} + b' \frac{dv}{dt}\right) \frac{\partial Z}{\partial v}\right\},$$

wenn X, Y, Z die Koordinaten des Endpunktes von R sind.

Ferner ist

$$\frac{ds}{dt} = T \frac{d\varrho}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{dv}{dt}, \quad \psi = x, y, z.$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -S \left(\frac{df(u, v)}{dt}\right)^2 = -S \left\{\frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \frac{dv}{dt}\right\}^2$$

$$= E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + G \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt}.$$

Die Gröfse ds heifst auch hier das „Bogenelement“ auf der Fläche.

Nehmen wir auf der Fläche eine Kurve des Systems, für welches v einen gegebenen Wert hat, so ist

$$\varphi(t) = f(u, c), \quad \frac{dv}{dt} = 0$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{E}\frac{du}{dt}$$

und die Winkel sind

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\sqrt{E}},$$

$$\cos\beta = \frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\sqrt{E}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\frac{\partial z}{\partial u}}{\sqrt{E}}.$$

Ist aber

$$\varphi(t) = f(c, v), \text{ so ist } \frac{du}{dt} = 0$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{E}\frac{dv}{dt}$$

$$\cos\alpha' = \frac{\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{G}},$$

$$\cos\beta' = \frac{\frac{\partial y}{\partial v}}{\sqrt{G}},$$

$$\cos\gamma' = \frac{\frac{\partial z}{\partial v}}{\sqrt{G}}.$$

Die Kurven $\varrho = f(u, c)$ und $\varrho = f(c, v)$ schneiden sich unter einem Winkel, dessen Cosinus ist

$$\cos w = \cos\alpha \, . \cos\alpha' + \cos\beta \, . \cos\beta' + \cos\gamma \, . \cos\gamma' = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Die Bedingung, dafs diese Kurven sich rechtwinklig schneiden, ist mithin

$$F = S\frac{\partial f(u, v)}{\partial u}\frac{\partial f(u, v)}{\partial v} = 0.$$

Diese Gleichung hätten wir auch sofort aufstellen können, da sich in diesem Falle die Tangenten im Schnittpunkte von je zweien unserer Kurven rechtwinklig schneiden.

Die Gröſse l ergiebt sich aus der Gleichung:

$$-1 = l^2 \left\{ \left(a \frac{du}{dt} + a' \frac{dv}{dt}\right) S \left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2 \right.$$
$$- 2 \left(a \frac{du}{dt} + a' \frac{dv}{dt}\right) \left(b \frac{du}{dt} + b' \frac{dv}{dt}\right) S \frac{\partial R}{\partial u} \frac{\partial R}{\partial v}$$
$$\left. + \left(b \frac{du}{dt} + b' \frac{dv}{dt}\right)^2 S \left(\frac{\partial R}{\partial v}\right)^2 \right\}.$$

Lassen wir die Kurve $\varrho = \varphi(t)$ eine Kurve $\varrho = \psi(v)$ werden, so ist:

$$\cos a = \frac{\frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dv} + \frac{\partial x}{\partial v}}{\frac{ds}{dv}},$$

$$\cos b = \frac{\frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dv} + \frac{\partial y}{\partial v}}{\frac{ds}{dv}},$$

$$\cos c = \frac{\frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dv} + \frac{\partial z}{\partial v}}{\frac{ds}{dv}}.$$

Die Kurven $\varrho = f(u, c)$ bezeichnen wir mit U, die Kurven $\varrho = f(c, v)$ mit V, und die Kurven $\varrho = \psi(v)$ mit C. Dann ist der Winkel zwischen U und C bestimmt durch die Gleichung

$$\cos(C, U) = \frac{E \frac{du}{dv} + F}{\sqrt{E} \frac{ds}{dv}}$$

und ebenso der Winkel zwischen C und V gegeben durch die Gleichung:

$$\cos(C, V) = \frac{F \frac{du}{dv} + G}{\sqrt{G} \frac{ds}{dv}}.$$

Schneiden die Kurven U und V sich rechtwinklig, so ist $F = 0$, und $\cos(C, U) = \cos(C, V)$, also:

$$\operatorname{tg}(C, V) = \sqrt{\frac{E}{G}} \frac{du}{dv}.$$

Aus der Gleichung der Normalen:

$$V[\varrho - f(u, v)]\, V \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

folgt, dafs die Winkel, welche sie mit den Achsen bildet, durch die Gleichungen:

$$\cos\lambda = \frac{A}{Tn} = X,$$
$$\cos\mu = \frac{B}{Tn} = Y, \quad Tn = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$
$$\cos\nu = \frac{C}{Tn} = Z,$$

bestimmt sind.

Auf der Fläche seien zwei Kurven U und V gezogen, welche sich in M schneiden. Auf U sei das Bogenelement dl und auf V dm. Der Inhalt des unendlich kleinen Parallelogramms aus den Seiten dl und dm ist gleich $TV dm\, dl$. Denn sind α und β zwei Vektoren, so ist

$$\alpha\beta = T\alpha \,.\, T\beta\,(-\cos\alpha\beta + \iota \sin\alpha\beta)\,.$$

α und β sind zwei anstossende Seiten eines Parallelogramms, dessen Inhalt $T\alpha \,.\, T\beta \,.\, \sin\alpha\beta$ ist, mithin ist der Inhalt des Parallelogramms auch gleich $TV\alpha\beta$. Setzen wir $\alpha = dm$ und $\beta = dl$, so erhalten wir $TV dm\, dl$. Es ist aber

$$\frac{dl}{du} = \frac{\partial\varrho}{\partial u}, \qquad \frac{dm}{dv} = \frac{\partial\varrho}{\partial v},$$

also das Parallelogramm aus dl und dm oder das „Oberflächenelement“ ist gleich

$$T\, du\, dv \left\{ V \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} \right\} = du\, dv \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$
$$= du\, dv \sqrt{EG - F^2}\,.$$

Ziehen wir an den Umfang des Oberflächenelements alle Normalen und diesen Normalen parallele Vektoren, die durch den Ursprung gehen, so bilden die Endpunkte dieser Vektoren auf einer Kugel mit dem Radius 1 und dem Ursprung als Centrum eine Kurve, welche auf der Kugel ein bestimmtes Oberflächenelement umhüllt.

Die Gleichung der Kugel ist

$$R^2 = -1\,.$$

Dies können wir auch schreiben

$$SnR = -Tn,$$

also

$$AX + BY + CZ = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Da $\frac{\partial R}{\partial u}$ und $\frac{\partial R}{\partial v}$ auf der Tangentialebene der Kugel liegen, so ist

$$R\,T\,V\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial v} = V\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial v},$$

mithin

$$S\,R\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial v} = +R^2\,T\,V\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial v}.$$

Das Oberflächenelement der Kugel ist also

$$-du\,dv\,SR\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial v}.$$

Dieselbe Gleichung erhalten wir, wenn wir in der Gleichung

$$AX + BY + CZ = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

die Gröſsen A, B, C mittelst X, Y, Z bestimmen.

Wir haben aber auch

$$Sn\frac{\partial n}{\partial u}\frac{\partial n}{\partial v} = SR\,Tn\left(\frac{\partial R}{\partial u}Tn + R\frac{\partial Tn}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial R}{\partial v}Tn + R\frac{\partial Tn}{\partial v}\right)$$
$$= (Tn)^3\,SR\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial v}.$$

Mithin ist das Oberflächenelement der Kugel gleich

$$-\frac{1}{(Tn)^3}Sn\frac{\partial n}{\partial u}\frac{\partial n}{\partial v} = \sigma$$

oder

$$\sigma = \frac{DD'' - D'^2}{(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Das Oberflächenelement der Fläche ist aber

$$s = (EG - F^2),$$

mithin

$$\frac{\sigma}{s} = \frac{DD'' - D'^2}{(EG - F^2)^2}.$$

Der Quotient $\frac{\sigma}{s}$ heiſst die „Krümmung der Fläche". Da der Zähler $DD'' - D'^2$ sich durch E, G und F darstellen

läfst, so ist die Krümmung der Fläche nur von E, G, F abhängig.

Haben wir zwei Flächen, deren Gleichungen $\varrho = f(u, v)$, $\varrho = F(u, v)$ seien, so erhalten wir für jedes Paar von Werten u, v einen bestimmten Punkt auf der einen und einen bestimmten Punkt auf der andern Fläche. Im allgemeinen entspricht also jedem Punkt der einen Fläche ein Punkt der andern Fläche.

Tritt der Fall ein, dafs die Gröfsen E, F, G in beiden Flächen denselben Wert haben, so ist nicht nur der Ausdruck für das Bogenelement $\sqrt{E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2}$ auf der einen Fläche identisch gleich dem für das Element der entsprechenden Kurve auf der anderen Fläche, sondern auch die Krümmungen der Flächen sind in den entsprechenden Punkten gleich. Es haben also entsprechende Kurven auf beiden Flächen gleiche Längen, sobald die Gröfsen E, F, G für beide Flächen dieselben sind.

In diesem Falle ist die eine Kurve an Länge gleich der andern, und wir können uns eine der Kurven immer so gebogen denken, dafs sie auf die andere gelegt werden kann, oder die eine Fläche können wir durch Biegung der andern derart entstanden denken, dafs keine Kurve bei der Biegung ihre Länge verändert hat. Wir haben daher den Satz:

„Wenn man eine Fläche biegt, so ändert sich ihre Krümmung nicht.“

Elfte Vorlesung.

Krümmungskurven auf der Fläche.

Die Gleichung des Krümmungsradius einer Kurve $\varrho = \varphi(t)$ ist

$$(\varrho - \varrho_1)\,V d^2\varrho\,d\varrho = d\varrho\,(T d\varrho)^2$$

und die Länge des Krümmungsradius

$$T(\varrho - \varrho_1) = \frac{(T d\varrho)^3}{T V d^2\varrho \,.\, d\varrho}.$$

Liegt diese Kurve auf der Fläche $\varrho = f(u, v)$, so müssen wir $d\varrho$ und $d^2\varrho$ als Funktion von u und v bestimmen.

Die Kurve $\varrho = \varphi(t)$ habe die Ebene durch die Flächennormale zur Schmiegungsebene; es fällt dann der Krümmungsradius in die Richtung der Normalen.

Wir können also setzen

$$\varrho - \varrho_1 = r \,.\, R, \quad r = T(\varrho - \varrho_1).$$

Aus der Gleichung der Krümmungskurve folgt

$$S(\varrho - \varrho_1) d^2\varrho \, d\varrho = 0,$$

mithin ist

$$SR d\varrho \, d^2\varrho = 0$$

oder

$$Sn \, d\varrho \, d^2\varrho = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$V d\varrho \, d^2\varrho \, V \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} = - V \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} V d^2\varrho \, d\varrho.$$

Setzen wir:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \alpha, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \beta, \quad d\varrho = \gamma, \quad d^2\varrho = \delta,$$

so ist

$$V(V\alpha\beta \,.\, V\gamma\delta) = \delta S\alpha\beta\gamma - \gamma S\alpha\beta\delta,$$

$$S\alpha\beta\gamma = S \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} d\varrho = S \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv \right) = 0,$$

also:

$$V(V\alpha\beta \,.\, V\delta\gamma) = d\varrho S \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} d^2\varrho = - V d^2\varrho \, d\varrho \,.\, V \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Mithin ist der Krümmungsradius in der Flächennormalen bestimmt durch die Gleichung

$$- d\varrho(\varrho - \varrho_1) SR d^2\varrho = d\varrho S d\varrho^2 \,.\, R$$

oder

$$\varrho - \varrho_1 = R : S \frac{dR}{d\varrho},$$

da bekanntlich die Gleichungen

$$S d\varrho R = 0, \quad S d^2\varrho \, dR = - S d\varrho \, dR$$

gelten.

Setzen wir statt R: $\frac{n}{Tn}$, so bestimmt sich r durch

$$r = \sqrt{EG - F^2} \frac{Eu'^2 + 2Fu' + G}{Du'^2 + 2D'u' + D''}, \text{ wenn } \varphi(t) = \varphi(v).$$

Die Kurve habe eine Ebene zur Schmiegungsebene, welche

mit der Tangentialebene den Winkel $90^0 - \varphi$ bilde. Die Gerade, in welcher der Krümmungsradius liegt, steht senkrecht auf $d\varrho$ und bildet mit der Flächennormalen den Winkel φ. Ist der Endpunkt von ϱ_1 auf dieser Geraden, so können wir setzen

$$\varrho - \varrho_1 = xn\left(\cos\varphi + \frac{d\varrho}{Td\varrho}\sin\varphi\right),$$

da der Faktor von n eine Quaternion ist, welche n um den Winkel φ dreht. Soll $\varrho - \varrho_1$ ein Krümmungsradius sein, so besteht noch die Gleichung

$$(\varrho - \varrho_1)\, Vd^2\varrho\, d\varrho = d\varrho\,.\,(Td\varrho)^2.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergiebt sich sofort:

$$Sn\,Vd^2\varrho\, d\varrho\cos\varphi + S[n d\varrho(Vd^2\varrho\, d\varrho)]\frac{\sin\varphi}{Td\varrho} = 0$$

oder

$$\cos\varphi\,(n\,Vd^2\varrho\, d\varrho + Vd^2\varrho\, d\varrho\,.\,n) + 2\sin\varphi\, Td\varrho Sn\, d^2\varrho = 0.$$

Wir haben also

$$\cos\varphi\, Vd^2\varrho\, d\varrho\,.\,n = Sn\,Vd^2\varrho\, d\varrho\,.\,\cos\varphi + V(Vd^2\varrho\, d\varrho\,.\,n)\cos\varphi$$
$$= -\sin\varphi\, Td\varrho\,.\,Sn\, d^2\varrho + V(Vd^2\varrho\, d\varrho\,.\,n)\cos\varphi.$$

Oben haben wir aber gefunden

$$V(n\,.\,Vd^2\varrho\, d\varrho) = +\, d\varrho S\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}d\varrho^2.$$

Mithin ist

$$\cos\varphi\, Vd^2\varrho\, d\varrho\,.\,n = -\sin\varphi\, Td\varrho Sn\, d^2\varrho - d\varrho\cos\varphi\, S\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}d^2\varrho.$$

Wir haben mithin die Gleichung

$$(\varrho - \varrho_1)d\varrho\cos\varphi\, Sn\, d^2\varrho + (\varrho - \varrho_1)\sin\varphi\, Td\varrho\,.\,Sn\, d^2\varrho$$
$$= -\, d\varrho\,.\,n\,.\,(Td\varrho)^2\,.\,\cos\varphi$$
$$= +\,(\varrho - \varrho_1')d\varrho\,.\,Sn\, d^2\varrho\,.\,\cos\varphi,$$

wenn $\varrho - \varrho_1'$ der Krümmungsradius in der Flächennormale ist. Nehmen wir in der letzten Gleichung den Tensor, beachten dafs $T\left(\cos\varphi + \frac{d\varrho}{Td\varrho}\sin\varphi\right) = 1$ ist, so erhalten wir die Gleichung

$$T(\varrho - \varrho_1) = r\,.\,\cos\varphi = r\,.\,\sin(90^0 - \varphi).$$

Diese Gleichung stellt den Satz von Meusnier dar, welchen wir also aussprechen:

„Legt man durch eine Tangente einer Fläche zwei Ebenen, von denen die eine normal zur Tangentialebene steht, die andere mit ihr den Winkel ψ bildet, so sind ihre beiden Krümmungsradien r und r_1 durch die Gleichung $r_1 = r \sin\psi$ verbunden."

Wir haben mithin auch

$$\varrho - \varrho_1 = r \cos\varphi \,.\, R\left(\cos\varphi + \frac{d\varrho}{Td\varrho} \sin\varphi\right).$$

Legen wir durch $d\varrho$ alle möglichen Schnittebenen, so bleiben r, R und $d\varrho$ konstant, während nur φ sich ändert. Die Länge von $\varrho - \varrho_1$ hat also den gröfsten Wert, wenn $\cos\varphi$ den gröfsten Wert erreicht, d. h. wenn $\varphi =$ Null ist oder wenn der Schnitt „Normalschnitt" ist.

Also:

„In allen Schnitten, die durch dieselbe Tangente einer Fläche geführt werden, ist der Krümmungsradius des Normalschnittes der gröfste."

Wir wollen nun die Frage beantworten: „Welches sind Maximum und Minimum der Krümmungsradien der Normalschnitte?" Das Maximum und Minimum der Gröfse r hängt ab von dem Ausdruck

$$\frac{E \,.\, u'^2 + 2Fu' + G}{D \,.\, u'^2 + 2D'u' + D''},$$

wenn

$$u' = \frac{du}{dv}$$

ist und wir statt $\varphi(t) = \varrho$ die Kurve $\varrho = \varphi(v)$ genommen haben. Da für alle Normalebenen durch R sich nur u' ändert, so haben wir diesen Ausdruck nach u' zu differentiieren und das Resultat gleich Null zu setzen.

Wir erhalten

$$Eu' + F + (Du' + D')K,$$

indem wir gesetzt haben

$$\frac{Eu'^2 + 2Fu' + G}{Du'^2 + 2D'u' + D''} = K.$$

Eliminieren wir aus den beiden Gleichungen u', so erhalten wir die Gleichung

$$(DD''-D'^2)K^2-(ED''-2FD'+GD)K+EG-F^2=0.$$

Es ist aber auch

$$K=\frac{r}{\sqrt{EG-F^2}},$$

mithin ist r durch folgende Gleichung

$$r^2(DD''-D'^2)-r\sqrt{EG-F^2}\,(ED''-2FD'+GD)$$
$$+(EG-F^2)^2=0$$

bestimmt.

Der Wert von u' bestimmt sich durch

$$u'^2(FD-ED')+u'(GD-ED'')+GD'-FD''=0.$$

Durch thatsächliche Ausrechnung überzeugen wir uns, dafs die letzte Gleichung nichts anderes ist als

$$Sd\varrho\,.\,n\,.\,dn=0$$

oder

$$Sd\varrho\,.\,R\,.\,dR=0.$$

Für r erhalten wir zwei Werte. Diese beiden Radien heifsen „Hauptkrümmungsradien".

Das Produkt der beiden Hauptkrümmungsradien ist aber

$$r_1\,.\,r_2=\frac{(EG-F^2)^2}{DD''-D'^2}.$$

In der letzten Vorlesung hatten wir

$$\frac{s}{\sigma}=\frac{(EG-F^2)^2}{DD''-D'^2}.$$

Die Krümmung der Fläche ist also gleich

$$\frac{\sigma}{s}=\frac{1}{r_1\,.\,r_2}.$$

Wir haben daher die Sätze:

„Wenn von zwei Flächen die eine in die andere gebogen werden kann, so ist in je zwei entsprechenden Punkten das Produkt der Hauptkrümmungsradien für beide Flächen gleich."

„Wenn ein Oberflächenelement durch eine beliebige Kurve begrenzt wird, und die Vektoren der Hilfskugel, welche den Normalen der Fläche längs der Kurve parallel

sind, gezogen werden, so entsteht auf der Kugel ein Oberflächenelement und es ist

$$\frac{\text{Kugeloberflächenelement}}{\text{Oberflächenelement}} = \frac{1}{\text{Produkt der beiden Hauptkrümmungsradien}}$$

oder in Zeichen:

$$\frac{\sigma}{s} = \frac{1}{r_1 \cdot r_2}.\text{“}$$

Aus der Gleichung

$$S\, d\varrho R\, dR = 0$$

folgt, dafs $d\varrho$, R, und dR in einer Ebene liegen.

Wir können mithin setzen

$$d\varrho = xR + y\, dR.$$

Da aber

$$SR\, d\varrho = 0$$

ist, und $d\varrho$ zu einem Hauptkrümmungsradius gehören soll, so ist

$$d\varrho = r\, dR.$$

Die Normalschnitte, welche die Hauptkrümmungsradien bestimmen, heifsen „Hauptschnitte“, und die Schnittlinien der Hauptschnitte und Tangentialebene heifsen „Haupttangenten“. Jeder Punkt der Fläche hat also im allgemeinen zwei Haupttangenten. Ist $\varrho = \psi(v)$ eine Kurve auf der Fläche, so hängt der Wert der Tangente von $\frac{du}{dv}$ ab. Für die Haupttangenten ist aber $\frac{du}{dv}$ bestimmt durch die Gleichung

$$S\frac{d\varrho}{dv} R \frac{dR}{dv} = 0$$

oder

$$S\frac{d\varrho}{dv} n \frac{dn}{dv} = 0.$$

Sollen wir also eine Kurve $\varrho = \psi(v)$ auf der Fläche so bestimmen, dafs die Tangenten dieser Kurve Haupttangenten sind, so mufs für jeden Punkt der Kurve die letzte Gleichung bestehen. Aus dieser Gleichung erhalten wir zwei Werte für $\frac{du}{dv}$, also auch zwei Werte für u dargestellt durch v. Auf der Fläche werden hierdurch zwei Systeme von Kurven fest-

gelegt, und zwar so, dafs die Kurven des einen Systems die Haupttangenten, welche r_1 zugehören, und die Kurven des andern Systems die Haupttangenten, welche r_2 zugehören, als Tangenten haben.

Die beiden Gleichungen

$$S\,d\varrho\,.\,R\,.\,dR = 0$$

$$\varrho = f(u, v)$$

stellen mithin jene beiden Kurvensysteme, die sogenannten „Krümmungskurven", auf der Fläche dar.

Zu diesen Kurven gelangen wir auch folgendermafsen:

Wir denken uns in irgend einem Punkte M auf der Fläche die Haupttangente gezogen, welcher der $\left.\begin{matrix}\text{Maximal-}\\\text{Minimal-}\end{matrix}\right\}$ Wert des Krümmungsradius entspricht. Diese Tangente hat mit der Fläche noch einen zweiten unendlich nahen Punkt M_1 gemein. Ziehen wir in diesem Punkte wieder die Haupttangente, welcher der $\left.\begin{matrix}\text{Maximal-}\\\text{Minimal-}\end{matrix}\right\}$ Wert des Krümmungsradius entspricht, so hat diese mit der Fläche noch einen Punkt M_3 gemein, welcher unendlich nahe an M_2 ist. Fahren wir so fort, so erhalten wir für den Ausgangspunkt M aus der ersten Haupttangente eine Kurve auf der Fläche, und folglich auch eine aus der zweiten Haupttangente. Wir können daher, wenn wir alle Punkte der Fläche als Ausgangspunkte betrachten, auf jeder Fläche zwei sich schneidende Kurvensysteme ziehen, deren Kurven die Eigenschaft haben, dafs sie in jedem Punkt die Haupttangenten der Fläche festlegen.

Die Gröfsen u und v sind von einander unabhängig. Wir können annehmen, dafs r_1 einer Kurve $\varrho = f(u, c)$ angehört und r_2 einer Kurve $\varrho = f(c, v)$. Denn wir können uns die Fläche $\varrho = f(u, v)$ durch diese beiden Kurvensysteme entstanden denken.

Aus der Gleichung

$$d\varrho = r\,dR$$

folgt dann

$$\frac{\partial \varrho}{\partial u} = r_1 \frac{\partial R}{\partial u}$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial v} = r_2 \frac{\partial R}{\partial v}.$$

Es ist aber

$$SR \frac{\partial f}{\partial u} = SR \frac{\partial f}{\partial v} = 0,$$

also

$$S \frac{\partial R}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial u} = S \frac{\partial R}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Und mithin aus den obigen Gleichungen

$$r_2 S \frac{\partial R}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial u} = r_1 S \frac{\partial R}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} = r_1 S \frac{\partial R}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial u}.$$

Da im allgemeinen r_2 und r_1 verschieden sind, so ist

$$S \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial R}{\partial v} = 0 \text{ oder } S \frac{\partial R}{\partial u} \frac{\partial R}{\partial v} = 0,\ S \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} = 0.$$

Die Richtungen der Haupttangenten sind aber parallel $\frac{\partial f}{\partial u}$ resp. $\frac{\partial f}{\partial v}$; wir haben daher den Satz:

„Die Hauptschnitte, also auch die Krümmungslinien, stehen aufeinander senkrecht.“

Diesen Satz wollen wir noch auf eine andere Art mit Hülfe des Satzes: „Jeder Kegelschnitt mit einem Mittelpunkte hat eine gröſste und eine kleinste Achse, welche aufeinander normal stehen“, erweisen.

Eine Tangente an die Fläche ist gegeben durch

$$\varrho = f(u, v) + m\, df(u, v).$$

Die Länge der Tangente machen wir gleich der Quadratwurzel des Krümmungshalbmessers, dessen Normalebene durch die Tangente geht. Wir setzen mithin

$$m^2 \{df(u, v)\}^2 = + \frac{\{df(u, v)\}^2}{S\, dR\, df(u, v)},$$

also

$$m^2 = + \frac{1}{S\, dR\, df(u, v)} = \frac{-1}{SR\, d^2 f(u, v)}$$

oder

$$m^2 = \frac{-Tn}{Sn\, d^2 f}.$$

Es ist also

$$\varrho = f(u, v) - df(u, v) \frac{Tn}{Sn\, d^2 f}.$$

Konstruieren wir alle Tangenten und tragen auf ihnen die Quadratwurzeln der Krümmungsradien ab, so bilden deren Endpunkte eine Kurve in der Tangentialebene. Die letzte Gleichung ist die der Kurve. Nehmen wir den Berührungspunkt als Vektorenanfang, die Tangentialebene als x, y-Ebene, setzen daher

$$\varrho - f(u, v) = \varrho', \quad z = 0, \quad \zeta = 0, \quad \varrho' = i_1 \xi + i_2 \eta,$$

so wird unsere Gleichung in folgende Gleichungen zerlegt:

$$\xi = Tn \frac{\frac{\partial x}{\partial u} u' + \frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{D u'^2 + 2 D' u' + D''}},$$

$$\eta = Tn \frac{\frac{\partial y}{\partial u} u' + \frac{\partial y}{\partial v}}{\sqrt{D u'^2 + 2 D' u' + D''}}.$$

Eliminieren wir u', so erhalten wir die Gleichung

$$D\left(\xi \frac{\partial y}{\partial v} - \eta \frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + 2D'\left(\xi \frac{\partial y}{\partial v} - \eta \frac{\partial x}{\partial v}\right)\left(\eta \frac{\partial x}{\partial u} - \xi \frac{\partial y}{\partial u}\right)$$
$$+ D''\left(\eta \frac{\partial x}{\partial u} - \xi \frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 = \text{konstant}.$$

Dies ist die Gleichung eines Kegelschnittes. Hiermit ist der Satz bewiesen.

Ob der Kegelschnitt eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist, hängt von $DD'' - D'^2$ ab oder von

$$Sn \frac{\partial n}{\partial v} \frac{\partial n}{\partial u}.$$

Der Kegelschnitt ist

1) eine Ellipse, wenn

$$Sn \frac{\partial n}{\partial v} \frac{\partial n}{\partial u} > 0,$$

2) eine Parabel, wenn

$$Sn \frac{\partial n}{\partial v} \frac{\partial n}{\partial u} = 0,$$

Zwölfte Vorlesung.

Geradlinige Flächen. Abwickelbare Flächen.

Wir haben gesehen, dafs die geradlinigen Flächen dargestellt werden können durch die Gleichung

$$\varrho = f(t) + v \,.\, \varphi(t).$$

Aus dieser Gleichung folgt, dafs die Gleichung der Tangentialebene für geradlinige Flächen ist:

$$S[\varrho - f(t)]\left(\frac{df(t)}{dt} + v\,\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)\varphi(t) = 0$$

und die Gleichung der Normalen ist

$$V\left\{[\varrho - f(t) - v\varphi(t)]\,V\left(\frac{df(t)}{dt} + v\,\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)\varphi(t)\right\} = 0,$$

oder

$$\varrho - f(t) = v\varphi(t) + w\,V\varphi(t)\,\frac{df(t)}{dt} + v\,.\,w\,V\varphi(t)\,\frac{d\varphi(t)}{dt}.$$

Für die Normalen längs einer Erzeugenden ist der Wert von t konstant, während sich v von Punkt zu Punkt ändert. Um den Ort der Normalen längs einer Erzeugenden zu finden, müssen wir aus der letzten Gleichung eine Gleichung ableiten, in welcher v verschwunden ist.

Zu diesem Zweck multiplizieren wir die letzte Gleichung:

1) mit $\varphi(t)\,V\varphi(t)\,\frac{df(t)}{dt}$, nehmen den Skalarteil und erhalten:

$$M = S\left\{[\varrho - f(t)]\,\varphi(t)\,V\varphi(t)\,\frac{df(t)}{dt}\right\}$$
$$= v\,.\,wS\left\{\varphi(t)\,V\varphi(t)\,\frac{df(t)}{dt}\,V\varphi(t)\,\frac{d\varphi(t)}{dt}\right\};$$

2) mit $\varphi(t)\,V\varphi(t)\,\frac{d\varphi(t)}{dt}$, nehmen den Skalarteil und erhalten:

$$S\left\{[\varrho - f(t)]\,\varphi(t)\,V\varphi(t)\,\frac{d\varphi(t)}{dt}\right\} = -wM;$$

3) mit $V\varphi(t)\,\frac{df(t)}{dt}\,V\varphi(t)\,\frac{d\varphi(t)}{dt}$, nehmen den Skalarteil und erhalten:

$$S\left\{[\varrho - f(t)]\,V\varphi(t)\,\frac{df(t)}{dt}\,V\varphi(t)\,\frac{d\varphi(t)}{dt}\right\} = v\,.\,M.$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt sofort die von v befreite Gleichung:

$$0 = S\left\{[\varrho - f(t)]\, V\varphi(t)\, \frac{df(t)}{dt}\ V\varphi(t)\, \frac{d\varphi(t)}{dt}\right\}$$
$$\times S\left\{[\varrho - f(t)]\varphi(t)\, V\varphi(t)\, \frac{d\varphi(t)}{dt}\right\}$$
$$+ S\left\{[\varrho - f(t)]\varphi(t)\, V\varphi(t)\, \frac{df(t)}{dt}\right\}$$
$$\times S\left\{\varphi(t)\, V\varphi(t)\, \frac{df(t)}{dt}\ V\varphi(t)\, \frac{d\varphi(t)}{dt}\right\}.$$

Dies ist eine Gleichung zweiten Grades in ϱ, und zwar stellt sie ein hyperbolisches Paraboloid dar:

„Wenn wir in einer geradlinigen Fläche entlang einer Erzeugenden der Fläche ihre Normalen ziehen, so bilden diese Normalen ein hyperbolisches Paraboloid."

Es kann der Fall eintreten, dafs dieses Paraboloid zu einer Ebene wird. Es bilden dann die Normalen längs einer Erzeugenden der Fläche eine einzige Ebene, oder was dasselbe ist, die Tangentialebenen längs einer Erzeugenden fallen in eine Ebene zusammen.

Die Gleichung der Tangentialebene ist

$$S[\varrho - f(t)]\left(\frac{df(t)}{dt} + v\,\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)\varphi(t) = 0,\ f' = \frac{df(t)}{dt}.$$

Sollen alle Punkte einer Erzeugenden dieselbe Tangentialebene besitzen, so mufs die Gleichung der Tangentialebene für jedes v längs der Erzeugenden immer dieselbe Ebene darstellen, d. h. die Gröfse v mufs aus der Gleichung der Tangentialebene verschwinden.

Dies ist aber möglich:

1) Wenn $V\varphi'(t)\varphi(t) = 0$ ist. Dies ist die Bedingung, dafs zwei aufeinander folgende Erzeugende parallel sind. Alle Erzeugenden laufen einer Geraden parallel. — Cylinderflächen.

2) Wenn $f'(t) = 0$, d. h. die Fundamentalkurve wird zu einem Punkt. Alle Erzeugenden gehen durch einen Punkt. — Kegelflächen.

3) Wenn $Vf'(t)\varphi(t) = l\,V\varphi'(t)\,\varphi(t)$ ist. Hieraus folgt

$$Sf'(t)\,\varphi(t)\,\varphi'(t) = 0.$$

Um diese Gleichung zu interpretieren, gehen wir von den Gleichungen zweier sich kreuzenden Geraden aus:

$$\varrho = \beta + v\alpha$$
$$\varrho = \beta_1 + v_1\alpha_1.$$

Ein Punkt der ersten Geraden hat von einem Punkt der zweiten Geraden die Entfernung

$$\delta = \beta_1 - \beta + v_1\alpha_1 - v\alpha.$$

Hieraus folgt

$$S\delta\alpha\alpha_1 = S(\beta_1 - \beta)\alpha\alpha_1.$$

δ sei der kürzeste Abstand beider Geraden, dann steht δ auf den Geraden senkrecht. Denn der Abstand des Endpunktes von β' von der Geraden

$$\varrho = \gamma + x\varepsilon$$

ist

$$\delta = \gamma + x\varepsilon - \beta'.$$

Damit dieser Abstand ein Minimum wird, mufs sein

$$dT\delta = dT(\gamma + x\varepsilon - \beta') = 0.$$

Es ist aber

$$dT\delta = T\delta\, S\delta^{-1}d\delta = -S\frac{\delta d\delta}{T\delta} = -S\frac{\delta\varepsilon dx}{T\delta},$$

also

$$S\delta\varepsilon = 0,$$

d. h. δ steht auf ε senkrecht. Es ist also auch δ auf α und α_1 senkrecht, daher ist

$$\delta = v_2 V\alpha\alpha_1,$$

hieraus

$$S\delta\alpha\alpha_1 = S(\beta_1 - \beta)\alpha\alpha_1 = v_2(V\alpha\alpha_1)^2,$$

mithin

$$\delta = S(\beta_1 - \beta)\alpha\alpha_1 : V\alpha\alpha_1.$$

Ist $\delta = 0$, so schneiden sich die beiden Geraden.

Setzen wir nun

$$\beta = f(t), \qquad \alpha = \varphi(t)$$
$$\beta_1 = f(t + dt), \quad \alpha_1 = \varphi(t + dt),$$

beachten

$$S\frac{df(t)}{dt}\varphi(t)\varphi(t) = 0,$$

so ist die Bedingung, dafs beide Erzeugende sich schneiden:

$$S\{[f(t+dt)-f(t)]\varphi(t)[\varphi(t+dt)-\varphi(t)]\}=0$$

oder

$$Sf'(t)\varphi(t)\varphi'(t)=0.$$

Aus dieser Gleichung folgt, da $f'(t)$, $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ in einer Ebene liegen:

$$\varphi = m\varphi' + nf',$$

wenn wir statt $\varphi(t)$ und $f(t)$: φ und f setzen.

Zur Bestimmung von m und n beachten wir, dafs ist

$$l\,V\varphi'\varphi = Vf'\varphi$$

und erhalten

$$\frac{\varphi}{n} = -l\varphi' + f'.$$

Die Gröfse l ist nur von t abhängig. Es ist mithin die Kurve, deren Gleichung

$$\varrho = f(t) - l\varphi(t)$$

ist, auf der Fläche gelegen. Die Tangente dieser Kurve hat die Richtung des Vektors

$$f'(t) - l\,\varphi'(t) - \frac{dl}{dt}\varphi(t)$$

oder, da $f'(t) - l\,\varphi'(t) = \frac{\varphi}{n}$ ist, dieselbe Richtung wie die Erzeugende φ. Wir haben also gefunden, dafs in unserem Falle sämtliche Erzeugende Tangenten an eine Kurve sind, welche auf der Fläche liegt. Diese Flächen werden „abwickelbare Flächen" genannt. Die Kurve, an welcher sämtliche Erzeugende der Fläche Tangenten sind, heifst die „Wendekurve" oder „Wendungskante" oder auch „Gratlinie" (arète de rebroussement). Die Flächen nennt man deshalb abwickelbar, weil man sie ohne Rifs und Falte in eine Ebene aufrollen kann. Es seien A, B, C... die aufeinander folgenden Schnittpunkte der Erzeugenden; $A'AB$, $B'BC$, $C'CD$.. seien auf den Sehnen AB, BC, CD abgetragene Strecken. Wir können nun die Ebene $A'BB'$ so um BB' drehen, dafs sie mit der Ebene $B'CC'$ in dieselbe Ebene fällt. Diese Ebene können wir um CC' drehen, dafs die drei Ebenen ABB', $B'C'C$ und $C'DD'$ in eine Ebene fallen. So können wir

nach und nach sämtliche Elemente der Fläche in eine Ebene bringen.

Da bei dieser Biegung das Produkt der beiden Hauptkrümmungsradien ungeändert bleibt und weil bei einer Ebene das Produkt der Hauptkrümmungsradien unendlich grofs ist, so ist das Produkt der beiden Hauptkrümmungsradien der abwickelbaren Fläche unendlich grofs.

Ist aber $\varrho = f(u, v)$ die Gleichung der Fläche, so ist dies eine abwickelbare Fläche, wenn ist

$$Sn \frac{\partial n}{\partial u} \frac{\partial n}{\partial v} = 0.$$

Diese Gleichung repräsentiert alle abwickelbaren Flächen. Setzen wir in dieser Gleichung

$$f(u, v) = f(u) + v\varphi(u),$$

so erhalten wir wieder die Gleichung

$$Sf' . \varphi . \varphi' = 0.$$

Ist eine Kurve doppelter Krümmung gegeben, so ist „die Fläche ihrer Tangenten abwickelbar", ebenso „die Fläche der Krümmungsachsen". Um die Gleichung der Fläche der Krümmungsachsen zu finden, nehmen wir die Kurve der Krümmungsmittelpunkte zur Fundamentalkurve, beachten, dafs die Erzeugenden auf den jedesmaligen Schmiegungsebenen senkrecht stehen. Wir erhalten so als die Gleichung der Krümmungsachsen

$$\varrho = f(s) - f''(s)^{-1} + v\, Vf'(s)\, f''(s).$$

Ist diese Fläche abwickelbar, so mufs sein

$$Sf'(t)\varphi(t)\varphi'(t) = 0$$

$$f(t) = f(s) - f''(s)^{-1}, \quad \varphi(t) = Vf'(s)\, f''(s).$$

Beachten wir folgende bekannte Gleichungen

$$Sf'f'' = 0, \quad Sf'f''' = -S(f'')^2,$$

so ist die Bedingungsgleichung identisch erfüllt.

Die Gleichung der Hauptnormalenfläche ist

$$\varrho = f(s) + v\, f''(s).$$

Soll die Fläche abwickelbar sein, so mufs die Gleichung

$$Sf'(s)\,f''(s)\,f'''(s) = 0$$

bestehen, d. h. die Kurve mufs eine ebene sein, welches der Annahme widerstreitet. „Die Hauptnormalenfläche ist nicht abwickelbar.“ Die zur Tangente und Hauptnormalen senkrechte Linie heifst „Binormale“, daher ist die Gleichung der Fläche der Binormalen

$$\varrho = f(s) + v\,Vf'(s)f''(s).$$

Aus dieser Gleichung folgt, dafs „die Fläche der Binormalen nicht abwickelbar ist“, wenn die Kurve nicht eben ist. Die Tangentialebene, welche die Binormale enthält, heifst „rektifizierende Ebene“ und der Durchschnitt zweier rektifizierender Ebenen wird die „rektifizierende Gerade“ genannt. Die rektifizierende Gerade ist senkrecht auf zwei aufeinander folgenden Hauptnormalen. Die Gleichung der rektifizierenden Geraden ist daher

$$\varrho = f(s) + v\,Vf''(s)\,f'''(s).$$

Wenn diese Fläche abwickelbar ist, so mufs sein

$$Sf'(s)\,Vf''(s)f'''(s)\;Vf''(s)\,f''''(s) = 0,$$

oder

$$S\,\{\,V[f'(s)\,Vf''(s)\,f'''(s)]\,Vf''(s)\,f''''(s)\,\} = 0.$$

Setzen wir

$$\alpha = f'(s),\quad \beta = Vf''(s)\,f'''(s),\quad \gamma = f''(s),\quad \delta = f''''(s),$$

beachten die Relation

$$S(V\alpha\beta\,.\,V\gamma\delta) = S\alpha\delta\,.\,S\beta\gamma - S\alpha\gamma\,.\,S\beta\delta,$$

so ist die Gleichung identisch erfüllt. „Die rektifizierenden Geraden bilden eine abwickelbare Fläche.“

Die rektifizierende Gerade ist nicht mit der Binormalen zu verwechseln. Beide Geraden befinden sich in der rektifizierenden Ebene, aber die Binormale steht nur auf einer Hauptnormalen und der Schmiegungsebene senkrecht, während die rektifizierenden Geraden auf zwei Hauptnormalen, aber nicht auf der Schmiegungsebene senkrecht stehen. Die rektifizierenden Geraden schneiden sich und berühren eine Wendekurve, während die Binormalen sich kreuzen.

Da die Fläche der Krümmungsachsen abwickelbar ist, so schneiden sich die Krümmungsachsen, und zwar in den Mittelpunkten der Oskulationskugeln der Kurve. Wir haben also den Satz:

„Der Ort der Mittelpunkte aller Oskulationskugeln einer Kurve ist die Wendekurve der Fläche der Krümmungsachsen.“

Es sei irgend eine Kurve gegeben. In einem Punkte M der Kurve ziehen wir nach einer Seite die Tangente, auf welcher wir von M aus eine Länge l abtragen. Wir spannen von einem Punkt N der Kurve einen Faden über die Kurve bis zum Ende der Tangente in M, dann beschreibt der Endpunkt dieses Fadens, wenn wir den Faden von der Kurve so abwickeln, dafs er immer gleich gespannt bleibt, eine Kurve, welche „Evolvente“ der gegebenen Kurve heifst. Die gegebene Kurve wird „Evolute“ der neuen Kurve genannt.

Um die Evolute zu finden, seien A, B, C, D .. die aufeinanderfolgenden Punkte einer Kurve. Die Schmiegungsebenen sind ABC, BCD, CDE ... Die Kurve der Krümmungsmittelpunkte sei A', B', C', D', ... Die Tangenten an die Kurve der Krümmungsmittelpunkte treffen die gegebene Kurve nicht. Ziehen wir die Krümmungsachsen $A'M$, $B'M_1$, $C'M_2$ ...., so bilden diese eine abwickelbare Fläche, deren Wendekurve die Kurve der M ist. Ziehen wir von A eine Gerade, welche die Krümmungsachse in A'' schneidet, dann ist $\overline{A''A} = \overline{A''B}$; ziehen wir BA'', so trifft diese Gerade die Krümmungsachse für B in B''; fahren wir so fort, so erhalten wir eine Kurve A'', B'', C''.., welche eine Evolute der Kurve ABC... ist. Denn es ist dann $ABCDE$... dadurch entstanden, dafs wir einen Faden von $A''B''C''$ abwickeln; dies können wir, da ist

$$\overline{BA''} = \overline{AA''},\ \overline{CB''} = \overline{BA''} + \overline{A''B''},\ \overline{DC''} = \overline{CB''} + \overline{B''C''} \text{ etc.}$$

Ist die Kurve eine ebene Kurve, so wird die Fläche der Krümmungsachsen zu einem Cylinder.

Wir haben also den Satz:

„Jede Kurve hat unendlich viele Evoluten, welche auf der Fläche der Krümmungsachsen liegen.“

Es sei die Gleichung einer Kurve $\rho = f(s)$, es soll die Gleichung der Evolvente bestimmt werden. In dem Punkte M ist das freie Stück des Fadens gleich l, in dem Punkte P jedoch gleich $\overline{MP} + l = s + l$. Ist R der Endpunkt der Tangente in P, so ist

$$RP = (s + l)\frac{df(s)}{ds},$$

da $\frac{df(s)}{ds}$ ein Einheitsvektor ist und die Richtung der Tangente hat.

Die Gleichung der Evolvente ist daher

$$\rho = f(s) - (s + l)\frac{df(s)}{ds}.$$

Die Gleichung der Evolute finden wir auch sehr leicht.

Es sei $\rho = f(t)$ die Gleichung der gegebenen Kurve. Jeder Punkt der Evolute liegt auf der Krümmungsachse. Die Krümmungsachse ist aber Schnittlinie zweier aufeinander folgenden Normalebenen. Es bestehen also für den Evolutenpunkt die Gleichungen

$$S[\rho - f(t)]\frac{df(t)}{dt} = 0$$

$$S[\rho - f(t)]\frac{d^2f(t)}{dt^2} = 0.$$

Es ist aber noch der Vektor $\rho - f(t)$ Tangente an die Evolute, also ist $\frac{d\rho}{dt} : T\frac{d\rho}{dt}$ ein Einheitsvektor in der Richtung dieser Tangente, wie $[\rho - f(t)] : T[\rho - f(t)]$ ein Einheitsvektor in der Richtung derselben Tangente ist.

Daher besteht noch die Gleichung:

$$U\left(\frac{d\rho}{dt}\right) = U[\rho - f(t)].$$

Aus diesen drei Gleichungen mit der Gleichung der gegebenen Kurve können wir eine Differentialgleichung für ρ ableiten: die Differentialgleichung der Evolute.

Auf der abwickelbaren Fläche der Krümmungsachsen liegt eine Evolute der gegebenen Kurve. Drehen wir die Fläche in eine Ebene, so fallen alle Normalebenen dabei aufeinander, indem sie sich um ihre aufeinander folgenden Durch-

schnittslinien drehen; infolge dieses Zusammenfallens reduziert sich die gegebene Kurve A, B, C... auf einen einzigen Punkt. Denn das Kurvenelement AB steht senkrecht auf der Normalebene in A, also fallen beim Zusammenlegen dieser Normalebenen A und B zusammen, ebenso kommen B und C zum Decken u. s. f. Daraus folgt, dafs die Tangenten AA'', BB'', CC'' gleichfalls aufeinander fallen und sich zu einer Geraden vereinigen, weil diese Linien sich schneiden und durch die zu einem Punkte gewordene Kurve gehen. Es werden also alle Evoluten der betreffenden Kurve zu Geraden, wenn wir die Fläche der Krümmungsachsen in eine Ebene abwickeln oder biegen. Da durch diese Biegung die Bogenelemente der Kurven auf der Fläche der Krümmungsachsen ungeändert bleiben, so haben wir den Satz:

„Die Evolute einer Kurve ist eine kürzeste Linie auf der Fläche der Krümmungsachsen.“

Damit aber eine Kurve auf einer abwickelbaren Fläche bei der Ausbreitung der Fläche in eine Ebene sich in eine Gerade verwandele, ist hinreichend, dafs zwei aufeinander folgende Elemente immer mit der dazwischen liegenden Erzeugenden gleiche Winkel machen. Es seien PP', $P'P''$ zwei aufeinander folgende Elemente einer kürzesten Linie auf einer abwickelbaren Fläche mit den Erzeugenden MP, $M'P'$, $M'P''$.... Drehen wir das Flächenelement $M'P'P''$ um $M'P'$, dafs es mit MPP' in eine Ebene fällt, so mufs P'' auf die Verlängerung der Tangente PP' nach P_1'' fallen.

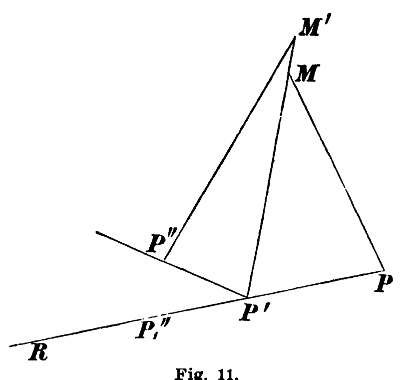


Fig. 11.

Da der Winkel $MP'P''$ sich bei der Drehung nicht ändert, so mufs natürlich $\sphericalangle MP'R = \sphericalangle MP'P''$ sein. Die Schmiegungsebene der Kurve ist die Ebene $PP'P''$, welche mit der Ebene $P''P'R$ zusammenfällt. Wir können PP' und $P'P''$ zwei Seiten eines geraden Kegels sein lassen, dessen Achse die

Linie $M'P'$ ist. Da diese Linien unendlich nahe liegen, so können wir die Ebene $RP'P''$ als Tangentialebene jenes Kegels längs RP' ansehen. Nun ist beim geraden Kegel die Berührungsfläche auf der Ebene des Meridians, welcher durch den Berührungspunkt geht, senkrecht: mithin ist hier die Ebene $RP'P''$ senkrecht auf der Ebene $PM'P'$, welche die Achse des Kegels und die durch den Berührungspunkt gehende Seite $P'R$ enthält. Es ist also $P''P'R$ senkrecht auf dem Element $MP'P$. Wir haben also den Satz:

„Wenn eine Kurve einer abwickelbaren Fläche eine kürzeste Linie ist, so sind alle ihre Schmiegungsebenen senkrecht auf der abwickelbaren Fläche, d. h. sie gehen durch die Normale der Fläche in dem betreffenden Punkte.“

Derselbe Satz gilt allgemein für die kürzesten Linien auf einer Fläche:

„Die kürzesten Linien auf einer Fläche haben die Eigenschaft, dafs ihre Schmiegungsebenen durch die Normalen der Fläche gehen.“

Es sei eine kürzeste Linie auf einer Fläche gegeben. Die Tangenten an diese Kurve bilden eine abwickelbare Fläche. Diese abwickelbare Fläche hat mit der gegebenen Fläche nicht nur jene Kurve, sondern auch die Tangentialebene längs dieser Kurve gemein, also auch dieselben Normalen längs der Kurve. Für die Fläche und die abwickelbare Fläche sind also längs der Kurve die Gröfsen E, F, G dieselben; die Kurve ist also für beide Flächen kürzeste Linie; es gehen mithin die Schmiegungsebenen längs der kürzesten Linie durch die Normalen der Fläche.

Dreizehnte Vorlesung.

Kürzeste Linien auf der Fläche. Krümmungskurven.

Die kürzesten Linien auf einer Fläche haben die Eigenschaft, dafs deren Schmiegungsebenen durch die Flächennormalen gehen.

Es bestehen mithin die beiden Gleichungen:

$$S[\varrho - f(u, v)]\,df(u, v)\,d^2f(u, v) = 0$$

$$V[\varrho - f(u, v)]\,n = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt die Differentialgleichung der kürzesten Linien

$$S\,df(u,\,v)\,n\,d^2f(u,\,v) = 0.$$

Diese Gleichung enthält die Variabeln du, d^2u. Hieraus folgt, dafs wir auf einer Fläche von einem Punkte aus unzählige kürzeste Linien ziehen können.

Ziehen wir von einem Punkte der Fläche nach allen Richtungen hin kürzeste Linien und nehmen wir davon eine als die erste, so wird offenbar jede andere gegeben sein, wenn der Winkel v bekannt ist, den eine andere Kurve durch jenen Punkt mit der ersteren bildet. Nennen wir u die Länge einer solchen kürzesten Linie vom Schnittpunkt an bis zu einem anderen Punkt auf ihr, so können wir offenbar jeden Punkt der Fläche durch u und den Winkel v bestimmen. Die Gleichung der Fläche sei $\varrho = f(u,\,v)$. Für ein konstantes v ist diese Gleichung die der kürzesten Linien und für ein konstantes u die Gleichung der Kurven, welche die Endpunkte von gleichlangen durch einen Punkt gehenden kürzesten Linien verbinden.

Es mufs also die Frage beantwortet werden: „Wie müssen u und v beschaffen sein, damit diejenigen Kurven, für welche v konstant ist, kürzeste Linien sind?“

Wir legen durch einen Punkt O alle kürzesten Linien auf der Fläche. Die Gröfse u sei die Bogenlänge, also du das Bogenelement. Die Gröfse u können wir als die eine Koordinate betrachten, da, wie wir gleich sehen werden, alle Punkte, welche gleiches u haben, auf einer Kurve liegen, die auf allen durch O gehenden kürzesten Linien senkrecht steht. Nehmen wir OM als die erste Kurve des Systems der Kurven u, so ist der beliebige Punkt N der Fläche gegeben, wenn ON, d. h. der Bogen u und noch der Winkel v, welchen ON in O mit OM bildet, oder durch NR. Wäre z. B. O der Pol der Erde, so wären u die Poldistanzen und v die geographischen Längen.

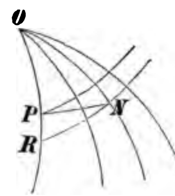


Fig. 12.

Sind OR, ON und RN unendlich kleine Gröfsen, so können wir leicht zeigen, dafs $\sphericalangle R = 90^0$.

Gesetzt der Winkel R sei ein spitzer Winkel. Wir machen $\overline{RP} = \frac{\overline{RN}}{\cos R}$, also $\sphericalangle PNR = 90^0$. Das Dreieck PRN betrachten wir als ein ebenes. Dann ist $\overline{RN} = \overline{RP} \sin R$, also

$$\overline{OP} + \overline{PN} = \overline{OR} - \overline{PR} + \overline{PN} = \overline{ON} - \overline{PR}(1 - \sin R).$$

Es wäre also $\overline{OP} + \overline{PN} < \overline{ON}$, d. h. $\overline{ON}$ keine kürzeste Linie.

Diese Zeichnung ist aber nur dann möglich, so lange R kein rechter Winkel ist; da sie aber falsch ist, mufs R immer ein rechter Winkel sein; ebenso N etc.

Es soll jetzt u, v so bestimmt werden, dafs für ein konstantes v, $\varrho = f(u, v)$ eine kürzeste Linie darstellt.

Die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche ist

$$S[\varrho - f(u, v)] \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} = 0$$

und die Gleichung der Schmiegungsebene an die Kurve $\varrho = f(u, c)$ ist

$$S[\varrho - f(u, v)] \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \frac{\partial^2 f(u, v)}{\partial u} = 0.$$

Da für die kürzesten Linien Tangentialebene und Schmiegungsebene senkrecht stehen, so haben wir auch

$$S\, V \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \frac{\partial^2 f(u, v)}{\partial v} \,.\, V \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} = 0.$$

Es besteht aber die Gleichung

$$- S V\alpha\beta \,.\, V\gamma\delta = S\alpha\gamma \,.\, S\beta\delta - S\alpha\delta \,.\, S\beta\gamma,$$

also ist

$$S \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v}\, S \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial f}{\partial u} = S \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 S \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Da aber du das Bogenelement der Kurve $f(u, c) = \varrho$ ist, so ist

$$S \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 = -1, \quad S \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial f}{\partial u} = 0,$$

mithin ist

$$S \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial f}{\partial v} = 0.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial S \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v}}{\partial u} = S \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial f}{\partial v} + S \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}.$$

Aus der Gleichung

$$S\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 = -1$$

folgt

$$\frac{\partial S \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2}{\partial v} = 0 \text{ oder } S \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0.$$

Mithin ist

$$\frac{\partial S \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v}}{\partial u} = 0$$

und aufgelöst

$$S \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} = \text{Gröfse, welche kein } u \text{ enthält.}$$

Lassen wir in dieser Gleichung u kleiner und kleiner werden, so bleibt die rechte Seite ungeändert. Für ein unendlich kleines u stehen aber die beiden Kurvensysteme aufeinander senkrecht, in diesem Fall ist $S \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} = 0$, mithin gilt diese Gleichung für jeden Wert von u.

Wir haben also den Satz:

„Wenn wir von einem Punkte einer Fläche nach allen Richtungen hin gleich grofse kürzeste Linien ziehen, so stehen dieselben auf der Kurve ihrer Endpunkte senkrecht."

Die Gleichung der kürzesten Linien ist

$$S \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} V \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} = 0.$$

Nehmen wir hier:

$$S\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 = -1 \quad \text{und} \quad S \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} = 0,$$

so ist

$$S \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial f}{\partial u} = 0, \; S \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

$$S \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0, \; S \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = -S \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{2} \frac{\partial S \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}{\partial v},$$

beachten die Gleichung

$$S\{V\alpha\beta\,.\,V\gamma\delta\} = S\alpha\delta\,.\,S\beta\gamma - S\alpha\gamma\,.\,S\beta\delta,$$

so erhalten wir die Gleichung

$$0 = -2S\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial f}{\partial v}u'^2 - S\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 S\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial f}{\partial u} + u'' S\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

$$- u' S\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

Wir können hier die Gröfse $G = -S\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$ einführen und erhalten die Gleichung

$$\frac{\partial G}{\partial u}u'^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}G - u''G - \frac{u'}{2}\frac{\partial G}{\partial v} = 0$$

oder

$$\frac{\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}}{\sqrt{u'^2 + G}} - \left(\frac{u'}{\sqrt{u'^2 + G}}\right)' = 0.$$

Mit Hülfe der Variationsrechnung können wir auch nachweisen, dafs die letzte Gleichung die Gleichung der kürzesten Linien ist.

Es sei die Fläche $\varrho = f(u, v)$ gegeben. Die unabhängigen Variabeln u und v wählen wir so, dafs die Gleichungen

$$S\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 = -1, \quad S\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}\right) = 0$$

bestehen.

Das Bogenelement auf der Fläche ist dann

$$ds = \sqrt{u'^2 + G'}\,dv,$$

also

$$s = \int_a^b \sqrt{u'^2 + G'}\,dv.$$

a und b seien gegeben. Wenn dieser Bogen ein Minimum ist, so ist die Kurve auf der Fläche eine kürzeste Linie.

Nach der Variationsrechnung ist aber das Integral

$$\int f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)dx, \quad \frac{dy}{dx} = y',$$

ein Minimum oder Maximum, wenn folgende Gleichung

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right] = 0$$

besteht. Setzen wir hier $x = v$, $y = u$, $f = \sqrt{u'^2 + G}$, so erhalten wir als Gleichung der kürzesten Linien

$$\frac{\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}}{\sqrt{u'^2 + G}} - \left(\frac{u'}{\sqrt{u'^2 + G}}\right)' = 0.$$

Wir können aber auch die kürzesten Linien durch bestimmte Eigenschaften von abwickelbaren Flächen definieren.

Auf einer Fläche $\varrho = f(u, v)$ ziehen wir eine Kurve, dann ist, da diese Kurve auf der Fläche liegt, die Gröfse u eine Funktion von v längs dieser Kurve $\varrho = \psi(v)$. Die Richtung der Tangente an die Kurve giebt der Vektor $\frac{df(u, v)}{dv}$ an, die Richtung der Flächennormalen bestimmt der Vektor

$$V\frac{\partial f(u, v)}{\partial u}\frac{\partial f(u, v)}{\partial v} = n.$$

Da Normale und Tangente senkrecht stehen, so steht auf beiden die Gerade $V\left(\frac{df(u, v)}{dv}n\right)$ senkrecht.

In einem Punkt der Fläche stehen also senkrecht die Vektoren f', n und $f'n$, mithin ist ein beliebiger Vektor durch den Kurvenpunkt gegeben durch

$$af' + bn + cf'n.$$

Diesen Vektor nehmen wir als die Erzeugende und die Kurve $\varrho = \varphi(v)$ als die Fundamentalkurve einer geradlinigen Fläche. Wir wollen u als Funktion von v so bestimmen, dafs die geradlinige Fläche

$$\varrho = f(u, v) + \lambda(af' + bn + cf'n)$$

eine abwickelbare ist. Die Gröfsen a, b, c sind Funktionen von v.

Damit die Fläche eine abwickelbare ist, so mufs die Gleichung

$$\begin{aligned} acf'^2(2Snf'' + Sn'f') + abSf'nf'' - bcSf'f'' \\ + (b^2 - c^2f'^2)Sf'nn' + f'^2n^2(cb' - bc') = 0. \end{aligned}$$

bestehen.

Für $b = 0 = c$ ist diese Gleichung natürlich identisch erfüllt.

Ist $a = b = 0$, so stellt die Gleichung eine Krümmungskurve dar. In diesem Falle liegen die Erzeugenden in den Tangentialebenen der Fläche und stehen auf den Tangenten der Krümmungskurven senkrecht. Denken wir uns eine Tangentialebene der Fläche, die sich beständig tangierend längs einer Kurve der Fläche bewegt, so beschreibt sie eine abwickelbare Fläche, für welche sie selbst Tangentialebene ist. Wir erhalten auf diese Weise eine „umhüllende abwickelbare Fläche", welche durch die Kurve hindurchgeht und fortwährend dieselben Tangenten wie die Fläche selbst hat. Die Erzeugende — Kante — der abwickelbaren Fläche erhalten wir als den Durchschnitt von zwei unendlich nahen Tangentialebenen. Wir haben also den Satz:

„Die Krümmungskurven einer Fläche haben die Eigenschaft, dafs, wenn man eine abwickelbare Fläche entlang einer solchen Krümmungskurve legt, welche die gegebene Fläche umhüllt, die Erzeugenden normal zu den Tangenten der Krümmungskurven stehen."

Eine weitere Eigenschaft der Krümmungskurven ist die, dafs die Normalen längs der Kurve eine abwickelbare Fläche bilden. Um dies zu beweisen, setzen wir nur $a = c = 0$.

Es besteht aber auch der Satz:

„Wenn man längs einer Krümmungskurve einer Fläche Gerade senkrecht zu den Tangenten der Kurve und unter konstantem Winkel gegen die Flächennormalen zieht, so bilden diese Geraden die Kanten einer abwickelbaren Fläche, und umgekehrt."

Dieser Satz ist nur bewiesen für den Fall, dafs die Erzeugenden die Flächennormalen sind. Setzen wir aber $a = 0$, $b =$ konstant und $c = \frac{m}{Tf'}$, so stehen die Erzeugenden senkrecht zu den Tangenten der Krümmungskurven und bilden mit den Flächennormalen einen konstanten Winkel.

Für $b = 0$ folgt, dafs

$$\lambda(af' + cf'n) = \varrho - f(u, v)$$

die Durchschnittslinie zweier aufeinander folgender Tangentialebenen ist, wenn die Gleichung

$$aSf'n' + cSfnn' = 0$$

besteht. Hieraus folgt sofort

$$S[\varrho - f(u, v)]\, n' = 0$$

d. h. n' steht senkrecht auf $\varrho - f(u, v)$, welche Gerade selbst senkrecht auf n steht. Wir können also schreiben

$$\varrho - f(u, v) = l\, Vnn'.$$

Dies ist also die Gleichung einer abwickelbaren Fläche, welche die gegebene Fläche längs einer Kurve auf der Fläche umhüllt. Die Erzeugende dieser Fläche ist nur von dem Punkte der Kurve, durch welchen sie geht, und der dort an die Kurve gezogenen Tangente abhängig. (Satz von Charles Dupin.)

Nehmen wir jetzt Vnn' als die Tangente einer Kurve auf der Fläche, so hat die umhüllende abwickelbare Fläche längs dieser Kurve die Gleichung

$$\varrho = f(u, v) + \lambda(a\, Vnn' + c\, Vnn' \,.\, n),$$

wenn a und c die Gleichung

$$aSf'n' - cSf'nn' = 0$$

erfüllen. In diesem Fall fällt die Erzeugende der abwickelbaren Fläche mit der Tangente f' zusammen.

Denn ist dies der Fall, so mufs sein

$$a\, Vnn' + c\, Vnn' \,.\, n = \lambda f'$$

und hieraus folgt sofort die Gleichung

$$aSf'n' + cSf'nn' = 0,$$

welches ja die Bedingungsgleichung ist, dafs die Fläche abwickelbar sei.

Hiermit ist ein zweiter Satz Dupins bewiesen. Die Vektoren f' und Vnn' nennt Dupin konjugierte Tangenten.

Dafs f' in die Richtung der Erzeugenden $a\, Vnn' + c\, Vnn' \,.\, n$ fällt, folgt auch aus der Gleichung der abwickelbaren Fläche; denn es ist

$$S[\varrho - f(u, v)]\, nf' = -n^2 (aSf'n' - cSf'nn') = 0,$$

es ist mithin $\varrho - f(u, v)$ sowohl auf n, als auch auf nf' senkrecht, fällt also in die Richtung von f'.

Wir legen durch den Vektorenanfang eine Kugel vom Radius 1. Auf der Fläche ziehen wir eine Kurve und an diese Kurve alle Flächennormalen. Wir ziehen vom Kugelmittelpnnkte Strahlen, welche diesen Normalen parallel sind, und erhalten auf der Kugel eine Kurve, deren Gleichung ist

$$\varrho = \frac{n}{Tn}.$$

Längs dieser Kurve legen wir Parallelen zu den Vektoren $f'n$, so bilden diese eine geradlinige Fläche

$$\varrho = \frac{n}{Tn} + \lambda f'n.$$

Diese Fläche ist abwickelbar, wenn die Kurve auf der Fläche eine Krümmungskurve ist. Wir haben daher den Satz:

„Wenn man auf einer Fläche eine Krümmungskurve zieht, und den Normalen der Fläche längs dieser Kurve durch den Mittelpunkt einer Kugel vom Radius 1 parallele Geraden legt, welche die Kugel in einer Kurve schneiden, und man längs dieser Kurve auf der Kugel die die Kugel umhüllende abwickelbare Fläche beschreibt, so laufen die Erzeugenden dieser abwickelbaren Fläche parallel den Geraden, welche auf den Flächennormalen und den Tangenten an die Krümmungskurven senkrecht stehen.“

Ziehen wir durch den Mittelpunkt der Kugel Gerade parallel den Tangenten einer Kurve auf der Fläche, so erhalten wir auf der Kugel eine Kurve, welche Fundamentalkurve der geradlinigen Fläche

$$\varrho = \frac{f'(u, v)}{Tf'(u, v)} + \lambda f'(u, v)\,n$$

ist. Soll diese Fläche abwickelbar sein, so mufs die Kurve auf der gegebenen Fläche eine kürzeste Linie sein.

Wir haben mithin den Satz:

„Wenn man auf einer Fläche eine kürzeste Linie zieht und den Tangenten dieser Kurve Parallelen durch den Mittelpunkt einer Kugel vom Radius 1, welche Geraden die Kugel in einer Kurve schneiden, und man längs dieser Kurve auf der Kugel die die Kugel umhüllende abwickelbare Fläche legt,

so laufen die Kanten dieser abwickelbaren Fläche parallel den Binormalen der kürzesten Linie."

Aus dieser Eigenschaft der kürzesten Linie können wir leicht ihre Gleichung ableiten. Da nämlich Uf' dieselbe Richtung wie f' hat, so folgt leicht, dafs nf' auf f'' senkrecht stehen mufs und die Gleichung der kürzesten Linie wird

$$Sf'nf'' = 0.$$

Um die allgemeine Theorie der Flächen und Kurven abzuschliefsen, wollen wir den Dupin'schen Satz kurz erwähnen:

„Wenn drei Flächen $\varrho = F(u,v)$, $\varrho = F_1(u,v)$, $\varrho = F_2(u,v)$ in ihren Durchschnittspunkten aufeinander senkrecht stehen, so sind in dem Punkte, in welchem alle drei Flächen sich schneiden, die Tangenten der Durchschnittskurven zugleich Tangenten der Krümmungskurven."

Die Flächen F_1 und F_2 schneiden sich in der Kurve φ_3, die Flächen F_2 und F_3 schneiden sich in der Kurve φ_1, die Flächen F_3 und F_1 in der Kurve φ_2. Da die Kurven im Durchschnittspunkt senkrecht stehen, so ist für diesen Punkt

$$S\varphi_3'\varphi_1' = 0, \quad S\varphi_1'\varphi_2' = 0, \quad S\varphi_2'\varphi_3' = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \varphi',$$

also auch, wenn wir beachten, dafs die Kurven auf den Flächen liegen,

$$SF_1'F_2' = 0, \quad SF_2'F_3' = 0, \quad SF_3'F_1 = 0, \quad F' = \frac{dF}{dt}.$$

Die Normale der Fläche F_1 hat die Richtung von φ_1'; ist also φ_2 auf F_1 eine Krümmungskurve, so mufs sein

$$S\varphi_2'\varphi_1'd\varphi_1' = 0.$$

Da φ_1' senkrecht auf φ_2' und φ_3' ist, so können wir setzen

$$\varphi_1' = x V\varphi_2'\varphi_3'$$

und die Gleichung der Krümmungslinien lautet

$$S\varphi_2' V\varphi_2'\varphi_3' V(\varphi_2''\varphi_3' + \varphi_2'\varphi_3'') = 0.$$

Beachten wir aber die Gleichung

$$SV\alpha\beta V\gamma\delta = S\alpha\delta . S\beta\gamma - S\alpha\gamma . S\beta\delta$$

und setzen

$$\alpha = \varphi_2', \quad \beta = V\varphi_2'\varphi_3' \quad \gamma = \begin{cases} \varphi_2'' \\ \varphi_2' \end{cases}, \quad \delta = \begin{cases} \varphi_3' \\ \varphi_3'' \end{cases},$$

so ist die Gleichung der Krümmungskurven identisch erfüllt.

Wir haben hiermit den Satz verificiert. Aus diesem Satz folgt sofort:

„Wenn drei Systeme von Flächen sich rechtwinklig schneiden, so ist der Durchschnitt von je zweien eine Krümmungskurve für beide.“

Vierzehnte Vorlesung.

Einige specielle Flächen.

Bedeutet $\varrho = f(u, v)$ die Gleichung einer Oberfläche, so erhalten wir alle Punkte der Fläche, wenn wir u und v variieren lassen.

In dieser Gleichung kommen noch konstante Gröfsen vor. Lassen wir eine von diesen Gröfsen sich ändern und lassen u, v ungeändert, so erhalten wir offenbar eine andere Oberfläche. Schreiben wir deshalb die Gleichung der Fläche $\varrho = f(u, v, a)$, so erhalten wir für alle möglichen Werte von a eine Folge von Flächen, welche dieselbe Natur haben und sich nur ihrer Lage und Dimension nach durch den speciellen Wert von a unterscheiden.

Die Gröfse a heifst der „Parameter der Fläche“.

Setzen wir für a in der Gleichung der Fläche $a + da$, so erhalten wir die Fläche

$$\varrho_1 = f(u, v, a) + \frac{\partial f(u, v, a)}{\partial a} da.$$

Diese Fläche liegt der andern unendlich nahe. Schneiden sich die beiden Flächen, so ist $\varrho = \varrho_1$ und es bestehen die beiden Gleichungen

$$\varrho = f(u, v, a), \quad \frac{\partial f(u, v, a)}{\partial a} = 0.$$

Diese Gleichungen stellen die Durchschnittslinie der beiden so aufeinander folgenden Flächen dar. Diese Linie heifst „Charakteristik“. Lassen wir a alle möglichen Werte annehmen, so stellt $\varrho = f(u, v, a)$ eine Folge von Flächen dar, und

eliminieren wir die Gröfse a aus den beiden letzten Gleichungen, so erhalten wir eine Gleichung

$$\varrho = F(u, v),$$

welche den geometrischen Ort aller Charakteristiken darstellt, d. h. der „einhüllenden Fläche“ derjenigen Flächen, welche aus der Gleichung $\varrho = f(u, v, a)$ sich ergeben, wenn wir darin für a alle möglichen Werte setzen.

Lassen wir ferner in der Fläche $\varrho = f(u, v, a) + \frac{\partial f(u, v, a)}{\partial \alpha} da$ das a zu $a + da$ werden, so erhalten wir eine dritte unendlich nahe Fläche

$$\varrho = f(u, v, a) + 2 \frac{\partial f(u, v, a)}{\partial a} d\alpha + \frac{\partial^2 f(u, v, a)}{\partial a^2} da^2.$$

Die erste Charakteristik ist bestimmt durch die Gleichungen

$$\varrho = f(u, v, a), \quad \frac{\partial f(u, v, a)}{\partial a} = 0,$$

und die zweite durch die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial f(u, v, a)}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial^2 f(u, v, a)}{\partial a^2} = 0.$$

Diese beiden Charakteristiken werden sich also im Endpunkte von ϱ im Allgemeinen schneiden und berühren, für welchen die Veränderlichen u und v durch die Gleichungen

$$\varrho = f(u, v, a), \quad \frac{\partial f(u, v, a)}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial^2 f(u,v,a)}{\partial a^2} = 0$$

bestimmt sind.

Setzen wir wieder statt a alle möglichen Werte ein, so werden die aus diesen Gleichungen hervorgehenden Gröfsen u und v einen geometrischen Ort bestimmen, in welchem jede Charakteristik geschnitten und berührt wird. Dieser geometrische Ort ist eine Kurve auf der einhüllenden Fläche, welche „Wendekurve“ oder „Rückkehrkante“ heifst. Diese Wendekurve wird von allen Charakteristiken berührt, wie die einhüllende Fläche von allen eingehüllten. Ist die sich verändernde Fläche eine Ebene, so ist die einhüllende Fläche eine abwickelbare Fläche und die Erzeugenden die Charakteristiken, welche die Wendekurve berühren.

Die Gleichung der Wendekurve erhalten wir aus den Gleichungen

$$\varrho = f(u, v, a), \quad \frac{\partial f(u, v, a)}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial^2 f(u, v, a)}{\partial a^2} = 0,$$

wenn wir a eliminieren, und erhalten eine Gleichung

$$\varrho = \varphi(u).$$

Es kann eintreten, dafs die aufeinander folgenden Charakteristiken einer einhüllenden Fläche sich nicht schneiden, mithin die Fläche keine Wendekurve hat. Dann existiert aber in jeder Charakteristik ein Punkt, der der benachbarten Charakteristik näher liegt, als jeder andere Punkt der Charakteristik. Die Folge dieser Punkte heifst „Striktionslinie".

Eine Cylinderfläche kann wie die einhüllende Fläche des durch eine Ebene beschriebenen Raumes angesehen werden, wenn diese Ebene sich so bewegt, dafs sie immer auf einer geraden Linie senkrecht steht oder, was dasselbe ist, dafs sie einer Linie als Leitlinie parallel bleibt. Eine Ebene, welche durch den Endpunkt von β geht und senkrecht zu α ist, hat zur Gleichung

$$S(\varrho - \beta)\alpha = 0.$$

Der Vektor β ist hier der Parameter. Aus der Gleichung folgt also

$$S\beta'\alpha = 0.$$

Es ist mithin α senkrecht zu β' und zu $\varrho - \beta$. Ist die Ebene parallel einem Vektor γ, so steht dieser auch auf α senkrecht und es ist

$$S(\varrho - \beta)\gamma\beta' = 0,$$

also

$$\varrho = \beta + n\gamma + m\beta'.$$

Es ist $n\gamma + m\beta'$ eine Gerade in der sich bewegenden Ebene; wir können daher n und m so bestimmen, dafs die Gerade

$$n\gamma + m\beta' = \delta v$$

der Leitlinie δ parallel läuft. Die Gleichung der Cylinderfläche ist also, wenn der Endpunkt von β eine Kurve $\varrho = \varphi(t)$ beschreibt,

$$\varrho = \varphi(t) + \delta v.$$

Hieraus folgt auch, dafs eine Cylinderfläche entsteht, wenn eine Gerade, beständig parallel bleibend, sich längs einer Kurve oder nach einem bestimmten Gesetze bewegt.

Eine Kegelfläche ist die einhüllende Fläche des durch eine Ebene beschriebenen Raumes, wenn diese Ebene beständig durch einen Punkt geht. Dieser Punkt ist die Spitze der Fläche.

Es ist die Gleichung einer Ebene durch den Endpunkt von β und senkrecht zu α

$$S(\varrho - \beta)\alpha = 0.$$

Hier ist α der Parameter. Also ist

$$S(\varrho - \beta)\alpha' = 0.$$

Mithin ist $\varrho - \beta$ auf α und α' senkrecht und wir können setzen

$$\varrho = \beta + x V\alpha\alpha'.$$

Eine Kegelfläche entsteht also, wenn eine gerade Linie durch einen Punkt geht und sich nach einem beliebigen Gesetz bewegt. Wir können die Gleichung der Kegelfläche schreiben

$$\varrho = \beta + x f(t).$$

Die Gleichung der „Rotations- oder Revolutionsflächen" erhalten wir auch sehr leicht. Eine Rotationsfläche entsteht dadurch, dass eine Kurve sich um eine Achse — Rotationsachse — bewegt. Ein und dieselbe Rotationsfläche kann entstehen durch Bewegung einer ebenen oder doppelt gekrümmten Kurve. Wir können uns die Rotationsflächen auch dadurch entstanden denken, dafs ein Kreis von veränderlichem Radius sich so parallel bewegt, dafs sein Mittelpunkt auf einer Geraden bleibt.

Die Achse geht durch den Ursprung und sie sei gegeben durch $\varrho = l\alpha$. Die Gleichung der Kugel, deren Mittelpunkt im Ursprunge liegt, ist

$$\varrho^2 = -c.$$

Die Schnittebene, welche den Kreis der Rotationsfläche aus der Kugel mit veränderlichem Radius ausschneidet, steht auf α senkrecht, also ist ihre Gleichung

$$S\alpha(\varrho - \beta) = 0 \quad \text{oder} \quad S\alpha\varrho = -d.$$

Zwischen d und c muſs eine Bedingung stattfinden, damit die Schnittkreise der veränderlichen Kugeln auf der Rotationsfläche liegen. Ist diese Bedingung: $d = \varphi(c)$, so ist die Gleichung der Rotationsfläche:

$$- S\alpha\varrho = \varphi(- \varrho^2).$$

Differentiieren wir diese Gleichung erst nach u und dann nach v, so erhalten wir die beiden Gleichungen:

$$S\alpha \frac{\partial \varrho}{\partial u} = 2\varphi'(- \varrho^2) S\varrho \frac{\partial \varrho}{\partial u},$$

$$S\alpha \frac{\partial \varrho}{\partial v} = 2\varphi'(- \varrho^2) S\varrho \frac{\partial \varrho}{\partial v}.$$

Hieraus folgt

$$S\alpha \frac{\partial \varrho}{\partial u} S\varrho \frac{\partial \varrho}{\partial v} - S\alpha \frac{\partial \varrho}{\partial v} S\varrho \frac{\partial \varrho}{\partial u} = 0,$$

oder

$$S\left(\alpha\varrho V \frac{\partial \varrho}{\partial u} \frac{\partial \varrho}{\partial v}\right) = 0.$$

Diese Gleichung wollen wir verifizieren, indem wir setzen:
$\alpha = ai_1 + bi_2 + ci_3$, $\varrho = i_1 x + i_2 y + i_3 z$, $u = y$, $v + x$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q.$$

Setzen wir dies ein, so erhalten wir die bekannte Gleichung

$$(a + cp)(y + zq) = (x + zp)(b + cq).$$

Aus unserer Gleichung folgt, daſs die Normale $V \frac{\partial \varrho}{\partial u} \frac{\partial \varrho}{\partial v}$ mit α und ϱ in derselben Ebene liegt. Wir haben daher den Satz:

„In jeder Rotationsfläche wird die Achse von der Normalen geschnitten."

Wir wollen noch der Schraubenlinien und Schraubenflächen gedenken. Eine Kurve, welche gegen die Krümmungskurven einer Fläche unter konstantem Winkel geneigt ist, heiſst eine „Loxodrome" der Fläche. Ist die Fläche eine Cylinderfläche, deren Erzeugende das eine System der Krümmungskurven bilden, so wird die Loxodrome auch eine „Schraubenlinie", „Schneckenlinie", „Helix" genannt.

Die Gleichung der Fläche sei $\varrho = f(u, v)$, und der Bequemlichkeit wegen u, v so gewählt, dafs die Kurven $\varrho = f(u, c)$, $\varrho = f(c, v)$ die Krümmungskurven darstellen. Wir ziehen auf der Fläche eine Kurve $\varrho = \psi(v)$, welche mit den Krümmungskurven einen gegebenen Winkel bilden soll. Es schliefsen dann die Tangenten $\frac{\partial f}{\partial u}$ und $\frac{df}{dv}$ einen konstanten Winkel ein, und ist dieser Winkel gleich a, so ist

$$-S\frac{df}{dv}\frac{\partial f}{\partial u} = T\frac{df}{dv}\cdot T\frac{\partial f}{\partial u}\cdot \cos a,$$

oder, da $F = 0$,

$$\sqrt{E}u' = \sqrt{E^2u'^2 + G}\,.\cos a.$$

Wenden wir dies auf eine Kugel an. Ist u die geographische Länge und v die geographische Breite, so ist:

$$E = \cos^2 v, \quad F = 0, \quad G = 1,$$

und setzen wir ein, so erhalten wir

$$\operatorname{tg} a \left(\frac{dv}{\cos v}\right) = du,$$

und integriert

$$\operatorname{tg} a\, l \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{v}{2}\right) + c = u$$

als Gleichung der Loxodrome.

Die Gleichung der Schraubenlinie finden wir aus der Gleichung des Cylinders

$$\varrho = u\alpha + \varphi(v)$$

dadurch, dafs wir u so als Funktion von φ bestimmen, dafs die Tangenten der Kurve mit α einen konstanten Winkel einschliefsen.

Ist der Cylinder ein gerader Kreiscylinder, die Gerade α die Achse und α senkrecht auf γ, so ist die Gleichung der Schraubenlinie auf dem Cylinder

$$\varrho = r\gamma\cos t + rV\gamma\alpha\,.\sin t + ra\alpha t.$$

Hier ist

$$\gamma^2 = -1, \quad \alpha^2 = -1, \quad S\alpha\gamma = 0$$

und der Radius des Basiskreises gleich r. Die Gröfse a ist die trigonometrische Tangente des konstanten Winkels, welchen jedes Element der Kurve mit der Ebene der Vektoren γ und $V\gamma\alpha$ einschliefst. Aus der Gleichung folgt sofort, dafs die Kurve auch so entstehen kann, dafs ein Punkt sich an dem Cylinder in die Höhe bewegt und zwar so, dafs seine Steigung proportional ist dem Winkel (t), welchen seine Projektion in dem Basiskreise beschreibt.

Die Tangente an die Kurve hat die Richtung

$$\frac{d\varrho}{dt} = -r\gamma \sin t + r\,V\gamma\alpha\,.\cos t + ra\alpha\,.$$

Hieraus folgt

$$T\frac{d\varrho}{dt} = r\sqrt{1+a^2},$$

$$S\frac{d\varrho}{dt}\alpha = -ra\,.$$

Es ist aber

$$S\frac{d\varrho}{dt}\alpha = -T\frac{d\varrho}{dt}\cdot\cos\varphi\,,$$

also

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}},$$

die Tangente an die Kurve bildet mit der Achse den konstanten Winkel.

Da die Normalebene

$$\sin tS(\varrho-\varrho')\gamma - \cos tS(\varrho-\varrho')\gamma\alpha - aS(\varrho-\varrho')\alpha = 0$$

senkrecht auf der Tangente steht, so bilden alle Normalebenen mit der Ebene des Basiskreises gleiche Winkel.

Es ist also

$$ds = r\sqrt{1+a^2}\,dt,$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 0\,.$$

Mithin ist

$$\frac{d^2\varrho}{ds^2} = \frac{d\left(\frac{d\varrho}{dt}\,\frac{dt}{ds}\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}$$

und daher

$$\frac{d^2\varrho}{ds^2} = -(\gamma\cos t + V\gamma\alpha\,.\sin t)\,\frac{1}{r(1+a^2)}\cdot$$

Es ist daher der Halbmesser der ersten Krümmung gleich

$$r_1 = (1 + a^2) r.$$

Der Ort der Krümmungsmittelpunkte hat die Gleichung

$$\varrho = ra\alpha t - ra^2\gamma \,.\, \cos t - ra^2 V\gamma\alpha \,.\, \sin t.$$

Dies ist die Gleichung einer Schraubenlinie, deren Achse α mit der Achse der gegebenen Schraubenlinie zusammenfällt. Diese Schraubenlinie liegt auf einem Cylinder, dessen Radius des Basiskreises a^2r ist; sie hat mit der gegebenen Schraubenlinie dieselbe „Ganghöhe", weil bei ihren Gleichungen das Glied $ra\alpha t$ übereinstimmt.

Beide Kurven liegen auf einer Fläche

$$\varrho = ra\alpha t + v \,.\, V\gamma\alpha \,.\, \sin t + v \,.\, \gamma \,.\, \cos t.$$

Denn setzen wir v erst gleich r und dann gleich $-ra^2$, so erhalten wir die beiden Schraubenlinien. Die Fläche heifst „Schraubenfläche". Sie enthält alle Schraubenlinien mit derselben Ganghöhe.

Die Fläche entsteht auch dadurch, dafs eine gerade Linie, auf einer andern stets senkrecht bleibend, sich an dieser so heraufbewegt, dafs die Höhen, um welche sie steigt, proportional den Winkeln sind, um welche sie sich dreht.

Um den Krümmungsradius der zweiten Krümmung zu erhalten, erinnern wir uns der Gleichung

$$Tr = \frac{S\left(\frac{d^2f}{ds^2}\right)^2}{S\frac{df}{ds}\frac{d^2f}{ds^2}\frac{d^3f}{ds^3}} = r_2.$$

Es ist aber

$$\frac{d^3\varrho}{ds^3} = \frac{r\gamma \,.\, \sin t - rV\gamma\alpha \,.\, \cos t}{r^3(1+a^2)^{\frac{3}{2}}},$$

daher der Radius der zweiten Krümmung gleich

$$r_2 = \frac{1+a^2}{a} r = \frac{r_1}{a}.$$

Der Ort der Mittelpunkte der Oskulationskugeln ist daher

$$\varrho = ra\alpha t - ra^2\gamma \,.\, \cos t - ra^2 V\gamma\alpha \,.\, \sin t.$$

Dies ist dieselbe Schraubenlinie der Mittelpunkte erster Krümmung. Diese Schraubenlinie ist daher Wendekurve der Krümmungsfläche.

Fünfzehnte Vorlesung.

Sätze aus der Mechanik.

Um die Bewegung eines Punktes festzusetzen, ist es nicht ausreichend, seinen Weg, d. h. die Kurve, welche der Punkt beschreibt, anzugeben, sondern wir haben noch die Zeit in Rücksicht zu nehmen, welche gebraucht wird, um diese Kurve zurückzulegen. Wir haben also den Ort zu bezeichnen, welchen der Punkt in einer bestimmten Zeit einnimmt. Ist die Bahn des Punktes gerade, so heifst die Bewegung „geradlinig", sonst „krummlinig"; je nachdem in gleichen Zeiten gleiche Wege durchlaufen werden oder nicht, spricht man von „gleichförmiger" oder „ungleichförmiger" Bewegung.

Die gleichförmige Bewegung definieren wir, wenn t die Zeit bedeutet, durch

$$\varrho = \alpha t .$$

Denn dies ist eine Bewegung, für welche der Quotient aus Weg und Zeit konstant ist, oder in gleichen Zeiten werden gleiche Wege zurückgelegt. Der Quotient $\frac{\varrho}{t}$, d. h. der in der Zeiteinheit zurückgelegte Weg, heifst die „Geschwindigkeit" des bewegten Punktes.

Entspricht der Aenderung t_1 der Zeit die Wegänderung ϱ_1, so ist auch

$$\varrho_1 = \alpha t_1 \quad \text{und} \quad \frac{\varrho_1}{t_1} = \alpha .$$

Jeder Weg seiner Richtung und Gröfse nach genommen, dividiert durch die entsprechende Zeit, giebt die Geschwindigkeit.

Bewegt sich also ein Punkt auf einer Kurve $\varrho = f(t)$, so ist die Geschwindigkeit des Punktes gleich

$$v = \frac{d\varrho}{dt} = \frac{df(t)}{dt} = \varrho' .$$

Es stellt ϱ' die Geschwindigkeit nach Gröfse und Richtung dar, und es ist $\varrho' = \frac{df(t)}{dt}$ die Gleichung der Geschwindigkeitskurve oder des „Hodographen" von Hamilton.

Da die „Beschleunigung“ der Zuwachs an Geschwindigkeit ist, welcher in der Zeiteinheit nach Gröfse und Richtung zu der vorhandenen Geschwindigkeit hinzukommt, so ist, wenn die Gleichung des Hodographen

$$\varrho' = f'(t),$$

ist,

$$\frac{d\varrho'}{dt} = \varrho'' = f''(t)$$

dieser Zuwachs in der Zeiteinheit, daher $\varrho'' = f''(t)$ die Beschleunigung nach Gröfse und Richtung.

Wir können aber setzen:

$$\varrho' = \frac{d\varrho}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \varrho_1 . v,$$

also ist

$$\begin{aligned} \varrho'' &= \varrho_1 \frac{dv}{dt} + v \frac{d\varrho_1}{dt}, \\ &= \varrho_1 \frac{dv}{dt} + v \frac{d\varrho_1}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \\ &= \varrho_1 \frac{dv}{dt} + v^2 \frac{d\varrho_1}{ds}. \end{aligned}$$

Es ist aber ϱ_1 ein Einheitsvektor in der Richtung der Tangente an die Kurve $\varrho = f(t)$, auf welchem $\frac{d\varrho_1}{ds}$ senkrecht steht.

Es ist mithin v die Geschwindigkeit in der Richtung der Tangente und $\frac{dv}{dt}$ die Gröfse der Beschleunigung längs der Tangente. Wir haben also die Beschleunigung zerlegt in eine Tangentialbeschleunigung und in eine längs der Hauptnormalen oder des Krümmungsradius. Es ist $\frac{d\varrho_1}{ds} = \frac{d^2\varrho}{ds^2}$ gleich dem reziproken Wert des Krümmungsradius. Ist die Bahn eine gerade Linie, so ist $\frac{d^2\varrho}{ds^2} = 0$. Die Beschleunigung reduziert sich auf die Tangentialbeschleunigung. Ist die Bewegung gleichförmig, so ist $v = c$, also $\frac{dv}{dt} = 0$. Die Richtung der Beschleunigung ist normal zur Bahn.

Es sei die Beschleunigung gegeben

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = P.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$V\varrho \frac{d^2\varrho}{dt^2} = V\varrho P.$$

Es ist aber

$$\frac{d\,V\varrho \frac{d\varrho}{dt}}{dt} = V\varrho \frac{d^2\varrho}{dt^2},$$

also

$$\frac{d\,V\varrho \frac{d\varrho}{dt}}{dt} = V\varrho P.$$

Nehmen wir an, dafs die rechte Seite gleich Null ist, dann wird

$$V\varrho \frac{d\varrho}{dt} = \alpha.$$

Und hieraus erhalten wir

$$S\alpha\varrho = 0.$$

Der Vektor ϱ, welcher eine Kurve beschreibt, steht auf α senkrecht. Die Bewegung findet in einer Ebene statt. Aus der Gleichung

$$V\varrho P = 0$$

folgt, dafs die Beschleunigung in der Richtung von ϱ wirkt. Die Bewegung ist eine sogenannte „Centralbewegung“.

Da aber $V\varrho \frac{d\varrho}{dt}$ der Gröfse nach dem Inhalte des Dreiecks mit den Seiten ϱ und $\frac{d\varrho}{dt}$ proportional ist, so ist dieser Inhalt konstant. In gleichen Zeiten werden gleiche Vektoren durchlaufen. Damit haben wir das „Prinzip der Flächen“ bewiesen.

Wir wollen einige spezielle Centralbewegungen durchgehen.

Es sei $P = \alpha$, und α konstant, welche Bahn beschreibt der Punkt? Die Beschleunigung hat also konstante Gröfse und Richtung.

Aus der Gleichung

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = \alpha$$

folgt

$$\frac{d\varrho}{dt} = \alpha t + \beta,$$

der Hodograph ist eine Gerade.

Aus der letzten Gleichung folgt

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\alpha t^2 + \beta t + \gamma.$$

Wir können die Konstanten so bestimmen, dafs $\gamma = 0$ wird. Da die Bewegung in einer Ebene erfolgt und jede Gerade die Kurve höchstens in zwei Punkten schneidet, so ist die Kurve ein Kegelschnitt und zwar hier eine Parabel.

Es sei die Gleichung

$$\varrho = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$$

gegeben. Wir ziehen eine Gerade parallel zu α_1 und durch den Endpunkt von β_1, so ist deren Gleichung

$$V\alpha_1(\varrho - \beta_1) = 0.$$

Soll diese Gerade die Kurve schneiden, so mufs der Vektor ϱ beiden Gleichungen genügen. Eliminieren wir ϱ, so erhalten wir die Gleichung

$$t^2 V\alpha_1\alpha + t V\alpha_1\beta + V\alpha_1(\gamma - \beta_1) = 0$$

und hieraus für t im allgemeinen zwei Werte, das heifst, die Kurve wird von einer Geraden höchstens in zwei Punkten geschnitten.

Um die Gleichung einer Parabel zu finden, setzen wir wie in der analytischen Geometrie

$$y^2 = 2px = n^2 x$$

oder

$$x = t_1^2, \quad y = nt_1,$$

und nehmen als Einheitsvektoren α', β' die x und y-Achse, dann ist

$$\varrho = \alpha' t_1^2 + \beta' n t_1.$$

Diese Gleichung stimmt mit der obigen überein, wenn wir setzen

$$\alpha' t_1^2 = \tfrac{1}{2}\alpha t^2, \quad \beta' n t_1 = \beta t.$$

Allgemein ist die Gleichung der Kegelschnitte resp. der Flächen zweiten Grades von der Form

$$a\varrho^2 + \Sigma b S\alpha\varrho S\beta\varrho + cS\gamma\varrho = d.$$

Dafs diese Fläche von jeder Geraden höchstens in zwei Punkten geschnitten wird, ist leicht einzusehen. Eine Gerade, welche durch den Endpunkt von β_1 geht, parallel α_1 ist, hat die Gleichung

$$\varrho = \beta_1 + x\alpha_1.$$

Soll der Endpunkt von ϱ auf der Fläche liegen, so mufs ϱ der Gleichung der Fläche genügen. Wir erhalten eine Gleichung zweiten Grades in x, also für x zwei Werte, das heifst, ϱ hat mit der Fläche zwei Punkte gemeinschaftlich.

Die Beschleunigung sei nach einem festen Punkte gerichtet und dem Quadrate des Abstandes des sich bewegenden Punktes vom Centrum umgekehrt proportional.

Es ist dann

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = c\,\frac{U\varrho}{(T\varrho)^2}.$$

Es ist aber

$$(T\varrho)^2 = -\varrho^2,$$

also

$$dT\varrho\,.\,T\varrho = -S\varrho\, d\varrho$$

und hieraus

$$\frac{dT\varrho}{T\varrho} = S\frac{d\varrho}{\varrho}.$$

Ferner folgt aus

$$\varrho = T\varrho\,.\,U\varrho$$

die Gleichung

$$d\varrho = T\varrho\,.\,dU\varrho + dT\varrho\,.\,U\varrho,$$

also

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{dU\varrho}{U\varrho} + \frac{Td\varrho}{T\varrho},$$

mithin

$$\frac{d\varrho}{\varrho} - S\frac{d\varrho}{\varrho} = V\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{dU\varrho}{U\varrho}.$$

Daher ist

$$dU\varrho = U\varrho\, V\frac{d\varrho}{\varrho} = U\varrho\, V\frac{\varrho\, d\varrho}{\varrho^2} = -\frac{U\varrho\,.\,V\varrho\, d\varrho}{(T\varrho)^2},$$

und

$$\frac{dU\varrho}{dt} = -\frac{U\varrho\, V\varrho\varrho'}{(T\varrho)^2}.$$

Aus der Gleichung

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = c\,\frac{U\varrho}{(T\varrho)^2}$$

ergiebt sich aber

$$V\varrho\,\frac{d^2\varrho}{dt^2} = 0,$$

mithin durch Integration

$$V\varrho\varrho' = \gamma.$$

Wir haben also

$$\frac{dU\varrho}{dt} = -\frac{U\varrho\,.\,\gamma}{(T\varrho)^2}.$$

Setzen wir dies in die Gleichung mit der Beschleunigung ein, so erhalten wir

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2}\,\gamma = -c\,\frac{dU\varrho}{dt},$$

und hieraus

$$\frac{d\varrho}{dt}\,\gamma = \eta - cU\varrho.$$

Es ist $\frac{d\varrho}{dt}$ senkrecht auf γ, ebenso $\frac{d^2\varrho}{dt^2}$ senkrecht auf γ, also ist auch $\frac{d\varrho}{dt}\cdot\gamma$ senkrecht auf γ. Da nun $U\varrho$ auf γ senkrecht ist, so ist auch η senkrecht auf γ.

Ist $\gamma^2 = c_1$, so ist die Gleichung des Hodographen

$$\frac{d\varrho}{dt} = \varrho_1 = \{\eta\gamma - cU\varrho\gamma\} : c_1,$$

und hieraus folgt

$$\varrho_1^2 = \text{Konstante}.$$

Der Hodograph ist ein Kreis.

Multiplizieren wir die Gleichung des Hodographen mit ϱ, nehmen den Vektorteil, so erhalten wir

$$c_1 V\varrho\,\frac{d\varrho}{dt} = \gamma c_1 = V\varrho\eta\gamma - cV\{\varrho U\varrho\gamma\}.$$

Hieraus folgt

$$\gamma^2 = S\eta\varrho + cT\varrho$$

die Gleichung der Bahn, welche wir auch schreiben können

$$(\gamma^2 - S\eta\varrho)^2 + c^2\varrho^2 = 0.$$

Diese Gleichung stellt einen Kegelschnitt dar.

Aus den Gleichungen der Bewegung

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = P,$$

$$\varrho = f(t)$$

folgt:

$$S\frac{d\varrho}{dt}\frac{d^2\varrho}{dt^2} = S\frac{d\varrho}{dt}P.$$

Wir hatten aber

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \text{oder} \quad \left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 = -v^2,$$

daher ist

$$S\frac{d\varrho}{dt}\frac{d^2\varrho}{dt^2} = -\frac{d\frac{v^2}{2}}{dt}.$$

Daher können wir die Gleichung schreiben

$$\frac{d\frac{1}{2}v^2}{dt} + S\frac{d\varrho}{dt}P = 0.$$

Ist nun P so beschaffen, dafs $S\frac{d\varrho}{dt}P$ ein vollständiges Differential ist und zwar

$$S\frac{d\varrho}{dt}P = -\frac{du}{dt},$$

so wird unsere Bewegungsgleichung zu

$$\frac{d(\frac{1}{2}v^2 - u)}{dt} = 0.$$

Sie giebt uns daher ein Integral derselben

$$\tfrac{1}{2}v^2 - u = m.$$

Wird u zu u_0, wenn v zu v_0 wird, so können wir m eliminieren und erhalten

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_0^2 = u - u_0,$$

welche Gleichung das „Prinzip der lebendigen Kraft" darstellt. Die Funktion u wird „Kräftefunktion" genannt.

In unserem letzten Beispiel ist

$$S\frac{d\varrho}{dt}P = cS\frac{U\varrho}{(T\varrho)^2}\frac{d\varrho}{dt}.$$

Wir haben aber

$$d\frac{1}{T\varrho} = -\frac{dT\varrho}{(T\varrho)^2} = \frac{-S\frac{d\varrho}{\varrho}}{T\varrho} = S\frac{U\varrho}{(T\varrho)^2}\frac{d\varrho}{dt}dt,$$

also ist

$$\frac{du}{dt} = -c\frac{d\frac{1}{T\varrho}}{dt},$$

und wenn wir $c = -m$ setzen, die Gleichung

$$u - u_0 = \tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_0^2 = \frac{m}{T\varrho} - \frac{m_0}{T\varrho_0}.$$

Wir wollen noch der Rotationen um sich schneidende Achsen gedenken. Auf der Rotationsachse liege eine Einheitsstrecke α. Es seien O und M zwei Punkte auf der Achse und MN senkrecht auf α.

Es ist dann

$$ON = OM + MN.$$

Der Winkel der Rotation um OM sei gleich φ und N komme nach N'. Es ist also

$$ON' = OM + MN'.$$

Da MN' auf OM senkrecht steht, so ist

$$MN' = (\cos\varphi + \alpha\sin\varphi)MN.$$

Es ist aber

$$S\alpha MN = 0.$$

Berücksichtigen wir diese Gleichung, so erhalten wir durch thatsächliche Multiplikation

$$(\cos\varphi + \alpha\sin\varphi)MN$$
$$= \left(\cos\frac{\varphi}{2} + \alpha\,.\sin\frac{\varphi}{2}\right)MN\left(\cos\frac{\varphi}{2} - \alpha\,.\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

und es ist

$$\left(\cos\frac{\varphi}{2} + \alpha\,.\sin\frac{\varphi}{2}\right)OM\left(\cos\frac{\varphi}{2} - \alpha\,.\sin\frac{\varphi}{2}\right) = OM.$$

Mithin können wir setzen

$$\beta_1 = \left(\cos\frac{\varphi}{2} + \alpha\,.\sin\frac{\varphi}{2}\right)\beta\left(\cos\frac{\varphi}{2} - \alpha\,.\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

wenn wir statt ON, ON', β, β_1 nehmen.

Geht durch O eine andere Rotationsachse, um welche das System mit dem Winkel φ_1 gedreht werden soll, so gelangt β_1 in die Lage

$$\left(\cos\frac{\varphi_1}{2} + \alpha_1 \sin\frac{\varphi_1}{2}\right)\left(\cos\frac{\varphi}{2} + \alpha \sin\frac{\varphi}{2}\right)\beta\left(\cos\frac{\varphi}{2} - \alpha \sin\frac{\varphi}{2}\right)$$
$$\times\left(\cos\frac{\varphi_1}{2} - \alpha_1 \sin\frac{\varphi_1}{2}\right).$$

Wir wollen setzen

$$\left(\cos\frac{\varphi_1}{2} + \alpha_1 \sin\frac{\varphi_1}{2}\right)\left(\cos\frac{\varphi}{2} + \alpha \sin\frac{\varphi}{2}\right) = \cos\frac{\Phi}{2} + \alpha' \sin\frac{\Phi}{2}.$$

Nehmen wir beiderseits die konjugierten Quaternionen, so haben wir

$$\left(\cos\frac{\varphi}{2} - \alpha \sin\frac{\varphi}{2}\right)\left(\cos\frac{\varphi_1}{2} - \alpha_1 \sin\frac{\varphi}{2}\right) = \left(\cos\frac{\Phi}{2} - \alpha' \sin\frac{\Phi}{2}\right).$$

Die Lage des Vektors ist also bestimmt durch

$$\left(\cos\frac{\Phi}{2} + \alpha' \sin\frac{\Phi}{2}\right)\beta\left(\cos\frac{\Phi}{2} - \alpha' \sin\frac{\Phi}{2}\right).$$

Die Folge von zwei Rotationen können wir einer Rotation gleich setzen.

Aus der Gleichung

$$\cos\frac{\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + S\alpha_1\alpha \,.\, \sin\frac{\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi}{2} + \alpha\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi_1}{2}$$
$$+ \alpha_1 \sin\frac{\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + V\alpha_1\alpha \,.\, \sin\frac{\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi}{2} = \cos\frac{\Phi}{2} + \alpha'\sin\frac{\Phi}{2}$$

folgt die Relation

$$\cos\frac{\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi}{2} - \cos(\alpha_1\alpha)\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi}{2} = \cos\frac{\Phi}{2},$$

da ist

$$\alpha_1\alpha = -\cos\alpha_1\alpha + \delta\sin(\alpha_1\alpha).$$

Der Vektor δ steht auf der Ebene $\alpha_1\alpha$ senkrecht; er bildet mit der Achse α' einen Winkel $90^0 - p$, wenn p der Neigungswinkel der Achse α' gegen die Ebene der Achsen α, α_1 ist.

Aus der Bestimmungsgleichung für Φ_1 folgt weiter

$$(V\alpha_1\alpha)^2\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi}{2} = S(\alpha' V\alpha_1\alpha)\sin\frac{\Phi}{2}.$$

Es ist aber

$$(V\alpha_1\alpha)^2 = -\sin^2(\alpha_1\alpha),$$
$$S(\alpha' V\alpha_1\alpha) = -\sin(\alpha_1\alpha)\cos(90^0 - p) = -\sin(\alpha_1\alpha)\sin p,$$

mithin auch

$$\sin\frac{\Phi}{2}\sin p = \sin\frac{\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\sin(\alpha_1\alpha).$$

Aus diesen Formeln ersehen wir schon die Lage der Achse α'.

Wir nehmen den Schnittpunkt der Achsen als Mittelpunkt einer Kugel, welche von den Achsen in den Punkten A, B, C durchdrungen wird. Es ist dann der Winkel B gleich $\frac{\varphi_1}{2}$ und zwar in dem Sinne der Drehung genommen, Winkel A ist gleich $\frac{\varphi_1}{2}$ dem Sinne der Drehung entgegengesetzt genommen, d. h. der Winkel A wird beschrieben durch Bewegung der Tangenten an den gröfsten Kugelkreis BA um die Achse α, welche Bewegung der gegebenen Rotation entgegengesetzt ist. Der Winkel C ist gleich $180^0 - \frac{\Phi}{2}$. Da OC eine Achse ist, um welcher das System rotiert, so hat sie die Eigenschaft, dafs sie durch die beiden Rotationen nicht aus ihrer Lage kommt. Drehen wir also OC um α, so kommt OC nach OC', und durch die Rotation um α_1 wieder nach OC, es ist also $B = \frac{\varphi_1}{2}$ und der Winkel A dem Winkel $\frac{\varphi}{2}$ entgegengesetzt. Der Kugelradius sei gleich der Einheit. Es seien C', B', A' die Pole der gröfsten Kreise AB, AC, BC, dann sind A, B, C die Pole der gröfsten Kreise $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$.

Wir haben die identische Gleichung

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OC}{OB} \cdot \frac{OB}{OA}.$$

Es ist aber

$$\frac{OC}{OA} = \cos AC + OB' . \sin AC$$

$$\frac{OC}{OB} = \cos BC + OA' . \sin BC$$

$$\frac{OB}{OA} = \cos AB + OC' . \sin BC.$$

Somit ist

$$\cos AC + OB' \sin AC = \cos BC . \cos AB + OA' \sin BC . \cos AB + OC' \sin AB . \cos BC + OA' . OC' \sin AB . \sin BC.$$

Es ist auch

$$OA' . OC' = -\frac{OA'}{OC'} = -(\cos C'A' + OB \sin C'A').$$

Wenn wir aber AB, BC, CA nach Richtung und Gröfse mit c, a, b bezeichnen, so sind die Bogen $C'A'$, $B'A'$, $B'C'$ bestimmt durch die Winkel (c, a), (b, a), (b, c). Also ist

$$OA' . OC' = -\cos(c, a) - OB . \sin(c, a).$$

Nehmen wir den Skalarteil unserer Gleichung, so ist

$$\cos AC = \cos BC \cos AB - \sin BC \sin AB \cos(c, a).$$

Der Vektorteil liefert aber

$$OB' . \sin AC = OA' . \sin BC . \cos AB + OC' . \sin AB . \cos BC$$
$$- OB . \sin BC . \sin AB . \sin(c, a).$$

Dividieren wir durch OA', nehmen den Skalarteil, so erhalten wir

$$\sin AC . \cos(a, b) = \sin BC . \cos AB + \sin AB . \cos BC . \cos(a, c),$$

da nämlich ist

$$\frac{OB'}{OA'} = \cos(a, b) + OC . \sin(a, b),$$
$$\frac{OC'}{OA'} = \cos(a, c) + OB . \sin(a, c),$$
$$\frac{OB}{OA'} = \text{ein Vektor}.$$

Der Vektorteil der durch OA' dividierten Gleichung liefert

$$OC . \sin AC . \sin(a, b) = OB . \sin AB . \cos BC . \sin(a, c)$$
$$- \frac{OB}{OA'} \sin BC . \sin AB . \sin(c, a).$$

Es ist aber

$$-\frac{OB}{OA'} = OB . OA' = -OA' . OB.$$

Dividieren wir die letzte Gleichung durch OB, so erhalten wir, da

$$\frac{OC}{OB} = \cos BC + OA' \sin BC$$

ist,

$$(\cos BC + OA' \sin BC) \sin AC . \sin(a, b)$$
$$= \sin AB . \cos BC . \sin(a, c) - OA' \sin BC . \sin AB . \sin(c, a).$$

Setzen wir hier die Vektor- und Skalarteile gleich, so erhalten wir die eine Gleichung

$$\sin AC . \sin(a, b) = \sin AB . \sin(a, c).$$

Vertauschen wir A und B, so haben wir:

$$\frac{\sin AC}{\sin(a, c)} = \frac{\sin AB}{\sin(a, b)} = \frac{\sin BC}{\sin(b, c)}.$$

In unserer Figur ist aber

$$AC = (\alpha, \alpha')$$
$$AB = (\alpha, \alpha_1)$$
$$BC = (\alpha_1, \alpha')$$
$$(a, b) = \left(\pi - \frac{\Phi}{2}\right)$$
$$(a, c) = \frac{\varphi_1}{2}$$
$$(b, c) = \frac{\varphi}{2},$$

also ist

$$\frac{\sin(\alpha, \alpha')}{\sin\frac{\varphi_1}{2}} = \frac{\sin(\alpha_1, \alpha')}{\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{\sin(\alpha, \alpha_1)}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Wir haben hier zugleich die Fundamentalgleichungen der sphärischen Trigonometrie abgeleitet.

Bildet α mit drei senkrechten Achsen i_1, i_2, i_3 die Winkel a_1, a_2, a_3, so ist

$$\alpha = i_1 \cos a_1 + i_2 \cos a_2 + i_3 \cos a_3.$$

Also ist

$$\cos\tfrac{1}{2}\varphi + \alpha \sin\tfrac{1}{2}\varphi = \cos\tfrac{1}{2}\varphi\,(1 + l i_1 + m i_2 + n i_3),$$

wenn

$$l = \cos a_1 \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},\ m = \cos a_2 \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},\ n = \cos a_3 \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

gesetzt wird. Setzen wir noch

$$\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi} = \triangle = 1 + l^2 + m^2 + n^2,\ l i_1 + m i_2 + n i_3 = \alpha_2,$$

so ist

$$\cos\frac{\varphi}{2} + \alpha \,.\, \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\triangle}}(1 + \alpha_2).$$

Ist aber

$$\rho = i_1 x + i_2 y + i_3 z$$

irgend ein Vektor, so erhält er durch die Drehung um die Achse α und den Winkel φ die Lage

$$\varrho' = \left(\cos\frac{\varphi}{2} + \alpha \sin\frac{\varphi}{2}\right)\varrho\left(\cos\frac{\varphi}{2} - \alpha \sin\frac{\varphi}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{\triangle}(1 + \alpha_2)\,\varrho\,(1 - \alpha_2).$$

Multiplizieren wir aus, berücksichtigen die Gleichungen

$$\alpha_2\varrho - \varrho\alpha_2 = 2V\alpha_2\varrho,$$
$$S\alpha_2\varrho\alpha_2 = 0,$$
$$V\alpha_2\varrho\alpha_2 = \alpha_2 S\varrho\alpha_2 - \varrho S\alpha_2^{\,2} + \alpha_2 S\varrho\alpha_2 = 2\alpha_2 S\varrho\alpha_2 - \varrho\alpha_2^{\,2},$$

so erhalten wir die Gleichung

$$\varrho' = \varrho(1 + \alpha_2^{\,2}) + 2V\alpha_2\varrho - 2\alpha_2 S\alpha_2\varrho.$$

Es ist aber

$$\alpha_2\varrho = -(lx + my + nz) + (ly - mx)i_3 + (nx - lz)i_2$$
$$+ (mz - ny)i_1,$$
$$1 + \alpha_2^{\,2} = 1 - l^2 - m^2 - n^2,$$

daher

$$\triangle\varrho' = \varrho(1 - l^2 - m^2 - n^2) + 2(ly - mx)i_3 + 2(nx - lz)i_2$$
$$+ 2(mz - ny)i_1 + 2\alpha_2(lx + my + nz).$$

Setzen wir nun

$$\varrho' = i_1x' + i_2y' + i_3z',$$

so finden wir

$$\triangle x' = x(1 + l^2 - m^2 - n^2) + 2y(lm - n) + 2z(ln - m)$$
$$\triangle y' = 2x(ml - n) + y(1 - l^2 + m^2 - n^2) + 2z(mn - l)$$
$$\triangle z' = 2x(nl - m) + 2y(mn - l) + z(1 - l^2 + m^2 - n^2).$$

Wir haben so die Formeln Eulers für die Transformation rechtwinkliger Koordinatensysteme erhalten.

Sechzehnte Vorlesung.

Biquaternionen. Algebra der Quaternionen.

Wir haben bis jetzt nur Quaternionen von der Form

$$q = a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3$$

betrachtet, in welchen a_0, a_1, a_2, a_3 reelle Zahlen sind. Es kann aber auch bei den Rechnungen geschehen, dafs diese Gröfsen komplex im Sinne der Algebra werden. Sollen wir z. B. die Schnittpunkte der Geraden

$$\varrho = \beta + x\gamma,$$

mit der Fläche, deren Gleichung

$$\varrho^2 = \alpha^2 + S\delta\varrho$$

ist, suchen, so haben wir

$$(\beta + x\gamma)^2 = \alpha^2 + S\delta\beta + xS\delta\gamma$$

zu setzen. Wir erhalten so die quadratische Gleichung

$$\beta^2 + 2xS\beta\gamma + x^2\gamma^2 - xS\delta\gamma = \alpha^2 + S\delta\beta.$$

Lösen wir nach den bekannten Methoden diese Gleichung auf, so wird der Ausdruck für x komplex, wenn die Gröfse

$$(S\beta\gamma - \tfrac{1}{2}S\delta\gamma)^2 < \gamma^2[\beta^2 - (\alpha^2 + S\delta\beta)]$$

ist. Es hat dann x einen Wert von der Form $a + b\sqrt{-1}$. Da aber x kein Vektor, sondern eine reelle Zahl — ein Skalar — ist, so ist auch $\sqrt{-1}$ ein Skalar, welchem nun auch als Skalar die kommutative Eigenschaft zukommt. Hamilton nennt nun einen Vektor von der Form

$$\varrho = \alpha + \beta\sqrt{-1}$$

einen „Bivektor" und die Quaternion

$$q = q_1 + q_2\sqrt{-1},$$

in welcher q_1 und q_2 reelle Quaternionen sind, eine „Biquaternion". Sind in unserer Quaternion die Zahlen a_0, a_1, a_2, a_3 komplexe Gröfsen gleich

$$a_0' + b_0\sqrt{-1},\ a_1' + b_1\sqrt{-1},\ a_2' + b_2\sqrt{-1},\ a_3' + b_3\sqrt{-1},$$

so können wir schreiben

$$q = a_0' + a_1'i_1 + a_2'i_2 + a_3'i_3 + \sqrt{-1}\,(b_0 + b_1i_1 + b_2i_2 + b_3i_3),$$

$$q_1 = a_0' + a_1'i_1 + a_2'i_2 + a_3'i_3,\quad q_2 = b_0 + b_1i_1 + b_2i_2 + b_3i_3.$$

Wir haben nun

$$S(q_1 + q_2\sqrt{-1}) = Sq_1 + \sqrt{-1}\,Sq_2,$$

$$V(q_1 + q_2\sqrt{-1}) = Vq_1 + \sqrt{-1}\,Vq_2.$$

Die Norm der Biquaternion ist

$$\begin{aligned} Nq = qKq = (Tq)^2 &= (Sq + Vq)(Sq - Vq) \\ &= (Sq_1 + Sq_2\sqrt{-1} + Vq_1 + Vq_2\sqrt{-1}) \\ &\times (Sq_1 + Sq_2\sqrt{-1} - Vq_1 - Vq_2\sqrt{-1}) \\ &= (Tq_1)^2 - (Tq_2)^2 + 2\sqrt{-1}\,S(q_1Kq^2). \end{aligned}$$

Wir sehen hier, dafs Nq gleich Null werden kann, ohne dafs es die Quaternionen q_1 und q_2 sind. Wir brauchen nur zu machen

$$Tq_1 = Tq_2, \quad Sq_1 Kq_2 = 0.$$

Für die Biquaternionen gelten sonst alle Gesetze der gemeinen Quaternionen.

Sind also q und q' zwei Biquaternionen, so ist

$$\frac{q}{q'} = \frac{1}{Nq'} qKq'.$$

Ist $Nq' = 0$, so ist die Division unbestimmt. Ist

$$q' = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3,$$

worin a_0, a_1, a_2, a_3 komplexe Zahlen sind, so ist

$$Nq' = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist für unendlich viele Elemente a_0, a_1, a_2, a_3 erfüllt.

Es giebt also unendlich viele derartige Quaternionen, welche in Bezug auf die Division dieselbe Rolle spielen, wie in dem reellen Zahlensysteme die Null. Lassen wir aber a_0, a_1, a_2, a_3 reelle Zahlen bedeuten, so ist die Division nur dann mehrdeutig, wenn $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Das Produkt zweier Quaternionen kann Null werden, ohne dafs ein Faktor Null wird, oder „ein Produkt von Biquaternionen ändert sich nicht in jedem Falle, wenn sich ein Faktor des Produktes ändert“.

Es seien q und q' zwei Biquaternionen, dann ist

$$\begin{aligned} qq' &= (q_1 + q_2\sqrt{-1})\,(q_1' + q_2'\sqrt{-1}) \\ &= q_1 q' + (q_1 q_2' + q_2 q_1')\sqrt{-1} - q_1 q_2'. \end{aligned}$$

Setzen wir

$$\begin{aligned} q &= q_2(\alpha + \sqrt{-1}), \\ q' &= (\alpha - \sqrt{-1})\, q_1', \\ T\alpha &= 1, \end{aligned}$$

so ist

$$qq' = 0.$$

Ist q eine Wurzel der Gleichung

$$q^2 = 0,$$

oder besteht zwischen den Gröfsen a_0, a_1, a_2, a_3 die Gleichung

$$a_0^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = 0,$$

so gilt nicht nur die Gleichung

$$qq' = q'',$$

sondern auch die Gleichung

$$q(q' + qx) = q'',$$

wenn x irgend eine komplexe Zahl ist.

Wie die Gleichung $q^2 = 0$, so hat auch die Gleichung

$$q^2 = a$$

unendlich viele Wurzeln. Es erfüllt nämlich jede Quaternion

$$q = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3$$

die Gleichung, wenn

$$a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = a$$

ist. Ist hier $a_0 = 0$, $a = -1$, so giebt es aufser $q = i_1, i_2, i_3$ noch unendlich viele Wurzeln der Gleichung

$$q^2 = -1.$$

Zu diesen Wurzeln gehören folgende:

$$q = i_1 \cos \vartheta_1 + i_2 \cos \vartheta_2 + i_3 \cos \vartheta_3,$$

wenn zugleich ist

$$\cos^2 \vartheta_1 + \cos^2 \vartheta_2 + \cos^2 \vartheta_3 = 1.$$

Diese Wurzeln werden durch die Punkte der Kugel

$$q^2 = -1$$

dargestellt.

Es ist aber

$$q^2 - a = (q - \sqrt{a})(q + \sqrt{a}).$$

Dieses Produkt verschwindet, ohne dafs einer der Faktoren verschwindet.

Denn es ist z. B.

$$(i_1 - \sqrt{-1})\,(i_1 + \sqrt{-1}) = 0,$$

ohne dafs $i_1 = \pm\sqrt{-1}$ gesetzt werden darf.

So ist auch

$$(i_1 + i_2 + i_3 - \sqrt{-1}\,\sqrt{3})\,(i_1 + i_2 + i_3 + \sqrt{-1}\,\sqrt{3}) = 0,$$

ohne dafs wir $i_1 + i_2 + i_3 = \pm\sqrt{-1}\,\sqrt{3}$ setzen können.

Nehmen wir die Gleichung

$$q^2 = 1,$$

so ist diese Gleichung erfüllt durch

$$q = 1, \quad q = -1,$$

aber auch durch

$$q = \sqrt{-1}\,i_1, \quad q = -\sqrt{-1}\,i_1, \quad q = \sqrt{-1}\,i_2,$$
$$q = -\sqrt{-1}\,i_2, \quad q = \pm\sqrt{-1}\,i_3$$

und durch

$$q = \pm\sqrt{-1}\,(\cos\vartheta_1 i_1 + \cos\vartheta_2 i_2 + \cos\vartheta_3 i_3),$$
$$\cos^2\vartheta_1 + \cos^2\vartheta_2 + \cos^2\vartheta_3 = 1.$$

Die Gleichung

$$q^3 = 1$$

hat unter anderen die Wurzeln

$$1;\ a,\ a^2,\ \alpha_1,\ \alpha_1^{\,2},\ \alpha_2,\ \alpha_2^{\,2},\ \alpha_3,\ \alpha_3^{\,2},\ a^2\alpha_n,\ a\alpha_n;\ a\alpha_n^{\,2},\ a^2\alpha_n^{\,2},$$

wenn ist

$$a = \frac{-1 + \sqrt{-1}\,\sqrt{3}}{2}, \quad \alpha_n = \frac{-1 + i_n\sqrt{3}}{2}, \quad n = 1,\ 2,\ 3.$$

Haben wir allgemein eine Gleichung

$$a_0 q^n + a_1 q^{n-1} + a_2 q^{n-2} + a_3 q^{n-3} + \ldots + a_n = 0,$$

worin die a Quaternionen sind und die q die unbekannte Quaternion, so erhalten wir, da die Summe wieder eine Quaternion ist, vier Gleichungen, welche in jeder der Unbekannten x_0, x_1, x_2, x_3 der Quaternion

$$q = x_0 + i_1 x_1 + i_2 x_2 + i_3 x_3$$

vom $n$ten Grade sind, und deren Auflösung mithin n^4 gleichzeitige Systeme oder also n^4 Wurzeln von q giebt. Daher

hat eine solche Gleichung zweiten Grades im allgemeinen 16, eine Gleichung dritten Grades 81 Wurzeln u. s. w.

Diese Gleichung ist aber nicht die allgemeinste n ten Grades. Denn betrachten wir eine Gleichung ersten Grades, so enthält diese neben den Gliedern aq noch Glieder qb oder auch aqb, welche sich nicht auf ein Glied aq zurückführen lassen.

Hamilton hat für Quaternionengleichungen eigene Methoden aufgestellt. Wir wollen hier nur einige wenige Aufgaben lösen. Lösungen von Vektorengleichungen haben wir in der siebenten Vorlesung schon kennen gelernt.

Damit aber eine Quaternionengleichung eine eindeutige Lösung giebt, mufs in den bekannten Stücken Skalar- und Vektorteil vorhanden sein.

So folgt z. B. aus der Gleichung

$$Tq = Sa$$

die beliebige Quaternion

$$q = Sa \,.\, Ub \,.$$

Ferner folgt aus der Gleichung

$$Sq = Sa$$

die beliebige Quaternion

$$q = a + \varrho \,,$$

wenn ϱ ein beliebiger Vektor ist. Hier enthalten offenbar die Lösungen noch drei unbestimmte Skalaren.

Ist aber die Gleichung

$$aq + qb = c$$

gegeben, so hat sie nur eine einzige Lösung. Ist nämlich

$$\begin{aligned} a &= a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 \\ b &= b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3 \\ c &= c_0 + c_1 i_1 + c_2 i_2 + c_3 i_3 \\ x &= x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 \,, \end{aligned}$$

so bestimmen sich die x aus den vier Gleichungen:

$$(a_0 + b_0)x_0 - (a_1 + b_1)x_1 - (a_2 + b_2)x_2 - (a_3 + b_3)x_3 = c_0$$
$$(a_1 + b_1)x_0 + (a_0 + b_0)x_1 + (b_3 - a_3)x_2 + (a_2 - b_2)x_3 = c_1$$
$$(a_2 + b_2)x_0 + (a_3 - b_3)x_1 + (a_0 + b_0)x_2 + (b_1 - a_1)x_3 = c_2$$
$$(a_3 + b_3)x_0 + (b_2 - a_2)x_1 + (a_1 - b_1)x_2 + (a_0 + b_0)x_3 = c_3.$$

Kürzer kommen wir also zum Ziel: Aus der Gleichung folgt

$$Ka\,.\,aq + Ka\,.\,qb = Ka\,.\,c$$

oder

$$(Ta)^2 q + Ka\,.\,qb = Ka\,.\,c\,.$$

Ferner ist

$$aqb + qb^2 = cb\,.$$

Addieren wir die beiden letzten Gleichungen, so finden wir

$$(Ta)^2 q + (Ka + a)qb + qb^2 = Ka\,.\,c + cb\,.$$

Es ist aber

$$a + Ka = 2\,Sa\,,$$

also

$$q[(Ta)^2 + 2\,bSa + b^2] = Ka\,.\,c + cb\,.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit

$$(Ta)^2 + b^2 - 2\,bSa\,,$$

so erhalten wir

$$q = \frac{Ka\,.\,c + cb}{[(Ta)^2 + b^2]^2 - 4\,b^2(Sa)^2}\,[(Ta)^2 + b^2 - 2\,bSa]\,.$$

Auf dieselbe Form läſst sich auch die Gleichung

$$q^2 = aq + qb$$

bringen. Indem wir durch q^2 dividieren, erhalten wir

$$1 = q^{-1}a + bq^{-1}$$

und hieraus q^{-1}, also auch q.

Die allgemeine Form einer Quaternionengleichung ersten Grades ist

$$\Sigma a_n q b_n = c\,.$$

Eine solche Gleichung läſst sich immer zu einer Gleichung mgestalten, in welcher nur Vektoren vorkommen.

Wir können nämlich setzen

$$a_n q b_n = S a_n q b_n + V a_n q b_n = S b_n a_n q + V a_n q b_n$$
$$= S f_n q + V a_n q b_n ,$$

wenn wir $f_n = b_n a_n$ machen. Daher haben wir

$$\Sigma S f_n q + \Sigma V a_n q b_n = c$$

oder vereinfacht

$$S f q + \Sigma V a_n q b_n = c .$$

Nehmen wir in dieser Gleichung den Skalar- und Vektorteil, so erhalten wir

$$Sc = Sfq = Sf . Sq + S(Vf Vq)$$
$$Vc = \Sigma V a_n q b_n = \Sigma V[a_n(Sq + Vq) b_n]$$
$$= \Sigma Sq . V a_n b_n + \Sigma V(a_n Vq b_n)$$
$$= Sq . \Sigma V a_n b_n + \Sigma V(a_n Vq b_n) .$$

Eliminieren wir hier Sq, so erhalten wir eine Gleichung ersten Grades für Vq. Wenn wir Vq mit ϱ bezeichnen, so erhalten wir eine Gleichung von der Form

$$\delta = \alpha S \beta \varrho + \gamma V a \varrho b .$$

Wir haben aber die Gleichung

$$\varrho S \alpha \beta \gamma = V \alpha \beta S \gamma \varrho + V \beta \gamma S \alpha \varrho + V \gamma \alpha S \beta \varrho .$$

Unsere Gleichung erhält mit Hülfe dieser Gleichung die Form

$$\Sigma \alpha S \beta \varrho = \gamma .$$

Können wir hieraus ϱ oder Vq bestimmen, so giebt eine der Gleichungen für Sc oder Vc den Wert von Sq; es ist also $q = Sq + Vq$ selbst gefunden.

Sind a_n, b_n und q Quaternionen mit derselben Achse, so können wir setzen

$$a_n = T a_n (\cos A_n + \iota \sin A_n)$$
$$b_n = T b_n (\cos B_n + \iota \sin B_n)$$
$$c_n = T c_n (\cos C_n + \iota \sin C_n)$$
$$q = x (\cos \varphi + \iota \sin \varphi)$$

und x, φ bestimmen sich durch die beiden Gleichungen

$$x \Sigma T a_n b_n \cos(A_n + B_n + \varphi) = Tc \,.\, \cos C$$
$$x \Sigma T a_n b_n \sin(A_n + B_n + \varphi) = Tb \,.\, \sin C \,.$$

Wir können die Definition der Exponentialgröfse

$$e^q = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{q^n}{n!}$$

auf den Fall, dafs q eine Quaternion ist, ausdehnen, so dafs wir setzen können

$$q = Tq \,.\, e^{\varphi \iota} \,.$$

Sind q_1 und q_2 zwei Quaternionen, so besteht die Gleichung

$$e^{q_1} \,.\, e^{q_2} = e^{q_1 + q_2}$$

nur dann, wenn q_1 und q_2 in derselben Ebene operieren.

Die allgemeine Gleichung ersten Grades für komplanare Quaternionen können wir also schreiben

$$\Sigma T a_n b_n q \,.\, e^{(A_n + B_n + \varphi)\iota} = Tc \,.\, e^{C\iota} \,.$$

Ist in dieser Gleichung $a_n = b_n = 0$, $A_n = B_n = C = 0$, so wird sie zu

$$Tq \,.\, e^{\varphi \iota} = Tc \,.$$

Um hier φ zu bestimmen, definieren wir den natürlichen Logarithmus durch die Gleichung

$$l e^{\varphi \iota} = \varphi \iota \,.$$

Wir haben mithin

$$l Tq + \varphi \iota = l Tc \,.$$

Es ist aber

$$l Tq (\cos \varphi + \iota \sin \varphi) = l Tq + \iota (\varphi + 2 h \pi) \,,$$

wo Tq den Zahlwert der reellen Zahl bedeutet und wir für h jede beliebige algebraische ganze Zahl setzen dürfen.

Hieraus folgt, dafs

$$Tq = Tc$$

und

$$\varphi = 2 h \pi$$

ist. Wir haben also die Wurzel

$$q = Tc (\cos 2 h \pi + \iota \sin 2 h \pi) \,.$$

Wir haben für den natürlichen Logarithmus einer Quaternion die Gleichung

$$lr(\cos\varphi + \iota\sin\varphi) = lr + \iota(\varphi + 2h\pi).$$

Setzen wir nämlich $r = e^x$, so ist

$$lr(\cos y + \iota\sin y) = le^{x+\iota y} = x + \iota y,$$

mithin

$$lr(\cos\varphi + \iota\sin\varphi) = lr + \iota(\varphi + 2h\pi).$$

Da die Multiplikation der Quaternionen nicht kommutativ ist, so besteht die Gleichung

$$lqq_1 = lq + lq_1$$

nur dann, wenn $qq_1 = q_1 q$ ist, d. h. wenn die Quaternionen in parallelen Ebenen operieren.

Neumann, Dr. **F.,** Professor der Physik und Mineralogie, Einleitung in die theoretische Physik. Vorlesungen gehalten an der Universität zu Königsberg. Herausgegeben von Dr. C. Pape, Professor der Physik an der Universität zu Königsberg. Mit in den Text gedruckten Figuren. [X u. 291 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 8.—

Pein, Dr. **A.,** Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Bochum, Aufgaben der sphärischen Astronomie, gelöst durch planimetrische Konstruktionen und mit Hülfe der ebenen Trigonometrie. Mit drei Figurentafeln. [VIII u. 48 S.] gr. 4. geh. n. ℳ 1.20. (In Kommission.)

Prix, Ernst, Oberlehrer an der Königl. Realschule I. O. zu Annaberg, Elemente der darstellenden Geometrie. Erster Teil. Darstellung von Raumgebilden durch orthogonale Projectionen. Mit in den Text gedruckten Figuren. [VII u. 72 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 1.20.

——— ——— Zweiter Teil. Schnitte von ebenen und krummen Flächen. Schiefwinklige und axonometrische Projectionen. Centralprojection. Mit in den Text gedruckten Figuren. [IV u. 120 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 2.—

Schapira, Dr. **Hermann,** Mitglied der neurussischen naturforschenden Gesellschaft, Grundlage zu einer Theorie allgemeiner Cofunctionen. Vortrag gehalten in der mathematischen Section der 54. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Salzburg am 19. September 1881. [20 S.] gr. 4. geh. n. ℳ 1.20.

——— Erweiterung der Begriffe der arithmetischen Grundoperationen und der allgemeinen Cofunctionen. Zwei Vorträge gehalten in der mathematischen Section der 55. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Eisenach am 19. September 1882. [20 S.] gr. 4. geh. ℳ 1.—

Schlömilch, Dr. **Oskar,** Geh. Schulrat im Königl. Sächsischen Kultusministerium, Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung einer Geometrie des Maſses. Ein Lehrbuch. Erstes Heft: Planimetrie. Sechste Auflage. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. [VI u. 162 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 2.—

——— ——— Zweites Heft: Ebene Trigonometrie. Sechste Auflage. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. [VI u. 97 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 1.60.

Streintz, Dr. **Heinrich,** a. o. Professor der mathematischen Physik an der Universität Graz, die physikalischen Grundlagen der Mechanik. [XII u. 142 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 3.60.





